Matemática

Exames Resolvidos:2014 - 2018

12ª classe

- **Tiago Chandiona Ernesto Franque**
- **Colaboração: Miguel Chandiona Ernesto Franque & Rosa Da Felicidade Eugénio Benzane**

A ponte sobre o rio Limpopo na cidade de Xai – Xai, província de Gaza, faz nos recordar algunas linhas intuitivas da trigonometria.

Na perspectiva de elaboração de material didáctico

Elaborado para os alunos das Escolas Secundárias Mocambiçanas Dezembro, 2020

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

Produzindo material didáctico

Índice

1.0. Apresentação do texto

Na perspectiva de elaboração de material didáctico na busca de qualidade de processo de ensino e aprendizagem, o grupo da disciplina de matemática da Escola Secundária Geral de Chipenhe, pensou em criar este texto de resolução de exames dos últimos cinco anos (2014 – 2018), com objectivo de mostrar os alunos alguns passos de resolução de questões que fazem parte dos exames nacionais.

A ideia de criação deste texto, surge com autor quando pela primeira vez familiarizou - se com os alunos que frequentavam a 12ª na Escola Secundária de Chipenhe, os alunos encaravam dificuldades na medida que resolviam as questões dos exames dos anos passados em forma de preparação para realização de exames finais do ano lectivo 2018, aqui alguns alunos limitavam se apenas por assinalar a alternativa de uma forma arbitrária, para não correr esse risco no seio dos alunos da Escola Secundaria Geral de Chipenhe em particular e das outras escola em geral, elaborou se este texto que contém as resoluções explicativas (didáctica) dos exames finais dos últimos cincos anos entre 1ª e 2ª época da 12ª classe.

Os exames dos anos passados contemplam os conteúdos da 11ª e 12ª classe, cada exame contém 45 questões, as primeiras 35 questões para ambas secções e as ultimas 10 questões estão separados (5 questões para secção de letras e 5 para secção de ciências). As primeiras questões de cada exame exige os conteúdos da 11ª classe pra a sua resolução, aqui estas questões também foram resolvidas, não foram deixada de fora porque em alguns casos constituem a base de resolução das questões cuja sua resolução exige os conteúdos leccionados na 12ª classe. Mas apela - se que os alunos devem prestar maior atenção nas questões cuja sua resolução exigem a matéria do programa de matemática 12ª classe, visto que, o novo regulamento da avaliação já prevê que os conteúdos dos exames finais deste ano apenas serão da 12ª classe.

Caro estudante! É com maior prazer que se fez este texto ” *Matemática-Exames resolvidos 12ª*”, explore no máximo possível este texto, acompanhe com maior prazer os passos de resolução de todos exames que fazem parte deste texto, assinale com uma sinalética no teu caderno de rascunho o passo que tiver dificuldade de perceber e apresente essa dificuldade ao teu docente de matemática ou a outra pessoa mais próxima que entende a matéria para sanear a sua dificuldade, e ajuda outros alunos que ainda não se avistaram e nem tem amizade com este texto, de forma aproximar dele, fazendo isso, estará a contribuir na melhoria de qualidade de ensino e aprendizagem de Matemática.

E para o outrem que entende melhor a matéria, de salientar que este não é um trabalho acabado, razão pelo qual, as recomendações, sugestões, subsídios, críticas estão bem-vindas para que se possa melhorar este trabalho.

Abraço, Bom proveito!

Os autores

Tiago Chandiona Ernesto Franque

05 de Dezembro de 2020

Apresentação do autor:

Tiago Chandiona Ernesto Franque: natural de Chimoio, província de Manica, licenciado em Ensino de Matemática, pela então Universidade Pedagógica de Moçambique, delegação de Manica (actual Unipunguê), possui habilitações em ensino de Física pela mesma universidade, onde foi assistente monitor de várias cadeiras nos cursos de Matemática, Física, e actualmente é docente de Matemática do Ensino Secundário Geral na Escola Secundária Geral de Chipenhe, em Gaza

Miguel Chandiona Ernesto Franque: natural de Chimoio, província de Manica, licenciado em Ensino de Matemática, pela então Universidade Pedagógica de Moçambique, delegação de Manica (actual Unipunguê), possui habilitações em ensino de Física pela mesma universidade, actualmente é docente de Matemática do Ensino Secundário Geral na Escola Secundária Geral de Emilia Dausse, em Maputo

Rosa da Felicidade Eugénio Benzane: natural de Manjacaze, província de Gaza, licenciada em Ensino de Matemática, pela então Universidade Pedagógica de Moçambique, delegação de Manica (actual Unipunguê), possui habilitações em ensino de Física pela mesma universidade, actualmente é docente de Matemática do Ensino Secundário Geral na Escola Secundária Geral de Teresa Nhalingue Amuli, em Mossurize, na província de Manica.

Estrutura do texto

As páginas deste texto, estão organizada da seguinte maneira:

- Ao começar as resoluções de cada exame, aparece uma página intitulada ‘Resolução de Exame de Matemática – 12ª. Classe, ano e época.
- Cada página está dividida por duas margens, sendo a margem esquerda com menor largura e sempre colorida e a margem com maior largura não colorida. Nas margens com menor largura aparecem alguns conceitos básicos que algum momento podem lhe ajudar durante a resolução de determinado exercícios

Resolução de Exame de Matemática – 12ª. classe

Ano: 2014/ 2ª Época

Conceitos básicos

1. **Lógica** é uma ciência que estuda argumentos vàlidos.

Proposição é uma afirmação que pode ser atribuida qualquer valor lógico sem nebhuma ambiguidade. Geralmente usa – se as letras minúsculas do alfabeto para indicar uma proposição.

Exemplo:

p: Maputo é cidade capital de Mocambiue (F)

q: 5 é um numero primo **(V)**

Negação de uma proposição: é uma operação lógica que consiste em negar uma determinada proposição, tal que a negação de uma proposição verdadeira passa para falsa e falsa passa para verdadeira. O simbôlo da negação é ~.

Primeiras leis de De Morgan

- A dupla negação de uma proposição corresponde a afirmação

$$\sim\sim p = p$$

- A negação de uma conjunção corresponde a negações das disjunções.

$$\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$$

- A negação de uma disjunção corresponde a negações das conjunções.

$$\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$$

Quantificadores

Quantificadores são operações lógicas que transformam uma expressão proposicional (condição) em proposições lógicas. Na iniciação da lógica matemática estuda – se dois tipos de quantificadores, universal e existencial .

- **Quantificador Unversal**
  É uma operação lógica que transforma uma expressão proposicional p(x) em uma proposição $\forall x \in D_p : p(x)$, em que essa nova proposição é verdadeira se p(x) é uma condição universal.
  Assim, a expressão

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

Exame de Matemática – 12ª classe, Ano: 2014/ 2ª Época

Resoluções

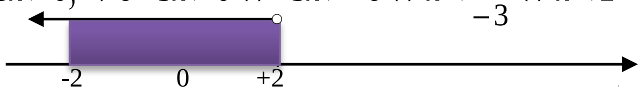
1. **Resposta:**
Vamos fazer a representação simbólica da seguinte proposição ”***O dobro de qualquer número inteiro positivo é diferente de zero***”
Antes de representar simbolicamente a proposição destacada, veja que nela está presente um quantificador universal “qualquer”, na lógica matemática o símbolo deste quantificador é $\forall$ e representemos o número inteiro por *x*, sendo assim teremos: $\forall_{x \in Z^+} : 2x \neq 0$

2. **Resposta:**
De acordo com as propriedades das operações lógicas sobre proposições, a dupla negação corresponde a afirmação, dai temos $\sim\sim p = p$ e foi dito que p é verdadeiro (V), logo a opção A não é falso.
Vamos analisar opção B, de acordo com o problema, $\sim q = \sim F \Leftrightarrow V$, logo a opção B não representa a opção Falsa.
Sabe - se que, a conjunção é uma operação lógica que associa ou faz corresponder um par de proposições p e q a uma outra terceira proposição $p \wedge q$, em que essa ultima é verdadeira se ambas forem verdadeiras simultaneamente e falsa em todos outros casos. Portanto como foi dito que *p* é Verdadeiro (V) e *q* é falso (F), dai que a conjunção de p e q é falso, logo a proposição falsa é da alínea C.

3. **Resposta:**
Diz se expressão algébrica racional inteira à toda expressão polinomial. Das alternativas apresentada, a que apresenta expressão algébrica racional inteira é $x+4$

4. **Resposta:**
Vamos determinar o domínio de existência da expressão $\log_3(6-3x)$
Entende se por domínio de existência à um conjunto onde o qual possui valores numéricos que dá sentido uma determinada expressão algébrica.
A expressão dada é algébrica irracional, sendo logarítmica, visto que a variável aparece sob forma de logaritmando, neste caso temos que recorrer a condição do logaritmo para determinar o domínio de existência da expressão dada, assim:
Vamos representar este resultado no eixo real e depois representa – o sob notação de intervalo:

$$\log_3(6-3x) \Rightarrow D = \{x \in IR : 6-3x > 0\} \Rightarrow 6-3x > 0 \Leftrightarrow -3x > -6 \Leftrightarrow x < \frac{-6}{-3} \Leftrightarrow x < 2$$



$$D =]-\infty;+2[$$

5. **Resposta:**
Pede se para simplificar a expressão algébrica racional que se segue: $\dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2}$
Em primeiro lugar vamos factorizar o numerador em factores lineares se possível, recorrendo o método de *Briot – Ruffin* teremos:
$\Rightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4$ O polinómio acima é completo e ordenado, assim fica no quadro proposto por Ruffin:

	1	-1	-4	4
1				
	1	0	-4	0

O resto é igual a zero isso significa que o polinómio é divisível por binómio *x-1*, e os coeficientes do *Q(x)* ,estão na ultima linha

$$\Rightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow (x^2 + 0x - 4)(x-1) \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x-1) \Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x-1)$$

Vamos factorizar o denominador:

$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)$ Voltando na expressão dada teremos:

$\forall x \in D_p : p(x)$ lê – se Todo (qualquer) x de domínio de ***p*** tal que p(x).

- **Quantificador Existencial**
  É uma operação lógica que transforma uma expressão proposicional p(x) em uma proposição $\exists x \in D_p : p(x)$, em que essa nova proposição é verdadeira se p(x) é uma condição particular.
  Assim, a espressão $\exists x \in D_p : p(x)$ lê – se Existe pelo menos um (algum) *x* de domínio de ***p*** tal que *p(x).*

Álgebra
É uma parte da Matemática que estuda leis e princípios de operações e manipulações entre vários expressões.

- **Expressão algébrica** é uma adição algébrica que possui pelo menos uma incógnita na sua estrutura
- **Classificação das expressões algébricas.**
  As expressões algébricas podem ser Racionais ou irracionais, as racionais podem ser inteiras ou fracionárias, as inteiras também chama – se polinomiais.

$$E.A\begin{cases} \text{Racional}\begin{cases}\text{Inteira}\\ \text{Fracionaria}\end{cases} \\ \text{Irracional}\end{cases}$$

Onde E.A quer dizer expressão algébrica.

Exemplos:

Expressão algébrica racional inteira o polinomial:

$$5x^2-3x+\frac{1}{2}$$

Expressão algébrica racional fracionária:

$$\frac{5x^2-3}{x-1},\ \frac{x}{x-5},\ \frac{x-x^2}{x}$$

Expressão algébrica racional fracionária

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

$$\frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-3x+2} \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+2)(x-1)}{(x-1)(x-2)} \Leftrightarrow x+2$$

6. Resposta:

Pede se para determinar o conjunto solução da equação $\log_3(x)+\dfrac{1}{\log_3(x)}=2$

A equação que pretendemos resolver é logarítmica, ela não é sempre definida em IR, razão pelo qual em primeiro lugar vamos determinar o campo de existência das soluções pela condição dos logaritmos, assim, o logaritmando deve ser positivo:

$$\log_3(x)+\frac{1}{\log_3(x)}=2 \Rightarrow D=\{x\in IR: x>0 \wedge \log_3(x)\neq 0\} \Rightarrow x>0\wedge \log_x(x)\neq 0$$

$$\Leftrightarrow x>0\wedge \log_3(x)\neq \log_3(1) \Rightarrow x>0\wedge x\neq 1 \Rightarrow D=IR^+ \setminus \{1\}$$

Agora vamos resolver analiticamente a equação dada em $IR^+ \setminus \{1\}$:

$$\log_3(x)+\frac{1}{\log_3(x)}=2 \Leftrightarrow \log_3(x)\times\log_3(x)+1=2\log_3(x) \Leftrightarrow (\log_3(x))^2-2\log_3(x)+1=0$$

$$\Leftrightarrow (\log_3(x)-1)(\log_3(x)-1)=0 \Leftrightarrow \log_3(x)-1=0 \vee \log_3(x)-1=0 \Rightarrow \log_3(x)=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=3^1 \Leftrightarrow x=3 \wedge 3\in IR^+\setminus\{1\} \therefore S=\{3\}$$

7. Resposta:

Pede se para determinar o conjunto solução da inequação $-x^2(x-2)\leq 0$

Vamos resolver essa inequação com auxílio da tabela de variação do sinal, assim:

$$-x^2=0 \wedge x-2=0 \Leftrightarrow x=0\wedge x=2$$

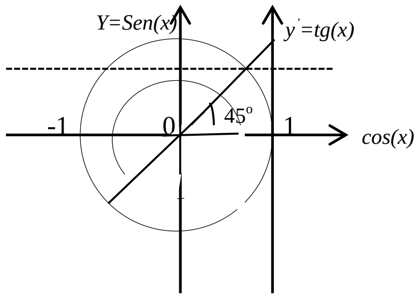
x	$]-\infty;0[$	0	$]0;2[$	2	$]2;+\infty[$
$-x^2$	+	0	—	-4	—
$x-2$	—	-2	—	0	+
$-x^2(x-2)$	—	0	+	0	—

A expressão $-x^2(x-2)$ é não positivo se e somente se $x\in\,]-\infty;0[\,\cup\,]2;+\infty[$, logo $-x^2(x-2)\leq 0$ se $x\in\,]-\infty;0[\,\cup\,]2;+\infty[$, a parte pintada representa o conjunto solução da inequação .

8. Resposta:

Pede se para determinar o conjunto solução da equação $tg(x)=1$

A equação dada é trigonométrica, assim que não há restrições vamos resolver em conjunto de números reais, já sabemos que as funções trigonométricas são funções circulares e as suas equações possuem infinitas soluções em IR. Este facto pode ser visto facilmente num círculo trigonométrico como segue:



Sendo assim,

$$tg(x)=1 \Leftrightarrow tg(x)=tg\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\right)$$

$$\vee\, tg(x)=tg\left(\frac{5\pi}{4}+\pi k\right) \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi k\,\vee$$

$$\vee\; x=\frac{k\pi}{4}+\pi k \vee; com\ k\in Z$$

9. Resposta:

A expressão simplificada de $\dfrac{tg(x)+1}{\cos(x)+sen(x)}$ segue:

$$\frac{tg(x)+1}{\cos(x)+sen(x)} \Leftrightarrow \frac{\frac{sen(x)}{\cos(x)}+1}{\cos(x)+sen(x)} \Leftrightarrow \frac{\frac{sen(x)+\cos(x)}{\cos(x)}}{\cos(x)+sen(x)} \Leftrightarrow \frac{sen(x)+\cos(x)}{\cos(x)} \times \frac{1}{\cos(x)+sen(x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{sen(x)+\cos(x)}}{\cancel{sen(x)+\cos(x)}} \times \frac{1}{\cos(x)} \Leftrightarrow 1 \times \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$$

10. Resposta:

Para todo $x, y \in IR$, é valida a propriedade de desigualdade triangular, assim,

$$|x+y| \le |x| + |y|$$

11. Resposta:

A equação $|x-5| = 2$ é modular, visto que a incógnita aparece dentro do módulo, ou seja pretendemos determinar abcissas cuja distância com o número 5 é igual a duas unidades, vamos aplicar a definição do módulo de número real, assim:

$$|x-5| = 2 \Leftrightarrow x-5 = 2 \vee x-5 = -2 \Leftrightarrow x = 2+5 \vee x = -2+5 \Leftrightarrow x_1 = 7 \vee x_2 = 3$$

Vamos somar as raízes encontradas: $S = x_1 + x_2 \underset{x_1=7 \vee x_2=3}{\Rightarrow} S = 7+3 \Leftrightarrow S = 10$

12. Resposta:

Vamos expandir a expressão $(x+y)^5$, assim:

$$(x+y)^5 = C_0^5 x^5 y^0 + C_1^5 x^4 y^1 + C_2^5 x^3 y^2 + C_3^5 x^2 y^3 + C_4^5 x^1 y^4 + C_5^5 x^0 y^5$$

Repare que o quinto termo é $C_4^5 x^1 y^4 = \dfrac{5!}{(5-4)! \times 4!} xy^4 = \dfrac{5 \times 4!}{1! \times 4!} xy^4 = 5xy^4$

13. Resposta:

Vamos determinar o conjunto solução da equação $\dfrac{(n-1)!}{(n+1)!-n!} = \dfrac{1}{81}$, em IN;

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!-n!} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow \frac{(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!-n(n-1)!} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow \frac{(n-1)!}{(n-1)![n(n+1)-n]} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^2+n-n} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} = \frac{1}{81} \Leftrightarrow 1 \times 81 = n^2 \times 1 \Leftrightarrow 81 = n^2 \Leftrightarrow n^2 = 81 \Leftrightarrow n = \pm\sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow n = \pm 9 \Rightarrow n_1 = -9 \vee n_2 = +9; n \in IN \Rightarrow n = 9$$

14. Resposta:

O problema diz que existe cinco candidatos para serem escolhidos, mas o eleitor deve escolher apenas 3 pessoas dessas 5, sendo um presidente, um secretário e um tesoureiro, o presidente uma vez escolhido já não pode voltar ser escolhido para ser secretário e tesoureiro, o secretário uma vez escolhido já não pode voltar a ser escolhido para ser tesoureiro. Para encontrar o número total de maneiras para essa escolha, existem duas saídas: por princípio fundamental da contagem ou por uso da fórmula de arranjos simples, assim:

i. *Princípio fundamental da contagem*:

Para escolher o presidente há 5 possibilidades $n_1 = 5$

Para escolher o secretário há 4 possibilidades $n_2 = 4$

Para escolher o tesoureiro há 3 possibilidades $n_3 = 3$

Portanto, o número total de maneiras diferentes para eleger estes três candidatos é dado por:

$$n = n_1 \times n_2 \times n_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

ii. *Por uso da fórmula de arranjos*

A ordem aqui interessa, então

$$\sqrt{x}, \sqrt{\frac{x^3+2}{x-3}}, \sqrt[5]{\frac{x-x^2}{x}}$$

Domínio de existência

Entende se por domínio de existência à um conjunto onde o qual possui valores numéricos que dá sentido uma determinada expressão algébrica.

Equação: é uma igualdade entre duas expressões designatórias. As equacoes podem ser racionais ou irracionais. As equações racionais podem ser inteiras ou fracionárias, e por sua vez as equações racionais inteiras podem ser do primeiro grau, do segundo grau, do terciro grau, ..., de *n* grau. Uma equação pode ser exponêncial, logarítmica ou trigonométrica.

Módulo ou valor absoluto de um número real

Chama – se módulo ou valor absoluto de um número real x ao próprio nómero se este for não negativo ou ao seu simétrico se este for negativo.

$$|x| = \begin{cases} x, \text{se } x \ge 0 \\ -x, \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Equação modular: é toda equação que por meio de princípios de equivalência é redutível a forma:

$$|x| = a$$

A solução da equação acima segue:

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$$

Cálculo Combinatório e Probabilidades

Princípio Fundamental de Contagem

Se um acontecimento aleatório A, pode ser realizado em n_1, n_2, n_3,..., n_k maneiras, entao o acontecimento A pode ser realizado em N maneiras totais, tal que

$$N = n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$$

Factorial de um número natural

O factorial de um número natural n é dado por:

$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 1$

Permutação

A permutacao de n elementos tomados p a p, é dado por:

$P_n = n!$ ou

$P_n = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 1$

Aranjos Simples

Aranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!},\ n > p$$

Combinação simples

Combinação simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)!\times p!},\ n > p$$

Binómio de Newton

Binómio de Newton é uma expressão que envolve combinação simples, essa expressão é usada para desenvolver os polinómios que aparecem sob forma de binómios potenciais

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + \ldots + C_n^n y^n$$

Definição clássica de Probabilidade

Se os acontecimentos elemntares forem equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimnto e o número de casos possíveis.

$$P(A) = \frac{n(C.F)}{n(C.P)},\ n(CF) \ge n(CP)$$

Função real de variável natural

Uma Sucessão de numeros reais (a_n): é uma função ***f*** em que o domínio é o conjunto dos números naturais e as imagens são números reais

$$f: IN \to IR$$
$$n \to a_n$$

Sucessão Monótona

Uma sucessão (a_n) é crescente se cada termo é maior ou igual ao termo anterior, ou seja, se:

$$a_{n+1} \ge a_n, \forall n \in IN \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_{n+1} \ge a_n, \forall n \in IN$$

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

$$n = 5;\ p = 3 \Rightarrow A_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5\times4\times3\times2!}{2!} = 5\times4\times3 = 60$$

A eleição pode ser feita em 60 maneiras diferentes.

15. Resposta:

Este é um problema muito simples que envolve cálculo de probabilidades, de acordo com o enunciado temos:

$$n(S) = 30; n(A) = 15 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow P(A) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

A probabilidade de um individuo ser escolhido ao acaso e ter olhos castanhos é de 50%.

16. Resposta:

Uma sucessão u_n é infinitamente grande negativa, se se verificar a seguinte condição:

$$\lim(u_n) = -\infty \Leftrightarrow n \to \infty \Rightarrow u_n \to -\infty$$

A opção **B** tem a sucessão infinitamente grande negativa, veja:

$$\lim(13-n) = 13-\infty = -\infty \Leftrightarrow n \to \infty \Rightarrow (13-n) \to -\infty$$

17. Resposta:

Pergunta se, qual é o centésimo quinto número impar? Essa pergunta equivale dizer qual é o número ímpar que esta na posição 105?

Sabe se que o conjunto de números ímpares é um conjunto ordenado, em que cada elemento pode ser obtido pela fórmula: $a_n = 2n-1$, neste caso para encontrar o centésimo quinto termo (105^o) basta substituir o *n* por 105, assim,

$a_n = 2n-1 \underset{n=105}{\Rightarrow} a_{105} = 2\times105-1 \Leftrightarrow a_{105} = 210-1 \Leftrightarrow a_{105} = 209$, logo o centésimo quinto número impar é 209.

18. Resposta:

O problema diz que o termo médio de uma PA de 5 termos é igual a 11, assim

$a_1;\ a_2;\ a_3 = 11;\ a_4;\ a_5$, Repare que o termo médio dito é o termo de ordem 3.

$$a_1 + a_5 = 2\times11 \wedge a_2 + a_4 = 2\times11;\ a_2;\ S_5 = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 \Leftrightarrow S_5 = a_1+a_5+a_2+a_4+a_3$$

$$S_5 = 2\times11+11+2\times11 \Leftrightarrow S_5 = 22+11+22 \Leftrightarrow S_5 = 55$$

19. Resposta:

A razão de uma PG é igual a 0.3 ($q = 0.3 = \frac{3}{10}$) e o segundo termo é 0.9 ($a_2 = 0.9 = \frac{9}{10}$)

De uma maneira geral o termo de uma PG é dado por: $u_n = a_1 q^{n-1}$

$$u_2 = a_1\left(\frac{3}{10}\right)^{2-1} \Leftrightarrow \frac{9}{10} = a_1\times\frac{3}{10} \Leftrightarrow 9 = 3a_1 \Leftrightarrow 3a_1 = 9 \Leftrightarrow a_1 = \frac{9}{3} \Rightarrow a_1 = 3$$

$$\Rightarrow a_n = 3\times\left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} \Leftrightarrow a_n = 3(0.3)^{n-1}$$

20. Resposta:

Vamos determinar a soma de todos termos da sucessão $\left(1;\frac{1}{3};\frac{1}{9};\ldots\right)$

Seja $a_1 = 1;\ a_2 = \frac{1}{3}; a_3 = \frac{1}{9};\ldots \Rightarrow q = \frac{1}{9}\div\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\div 1 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$, a soma de *n* termos de uma PG é dado por:

Uma sucessão (a_n) é decrescente se cada termo é menor ou igual ao termo anterior, ou seja, se:

$$a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in IN \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in IN$$

Uma sucessão crescente ou decrescnte diz – se monótona.

Sucessão limitada
Uma sucessão (a_n) é limitada se existirem dois numeros reais m e M tais que:

$$m \leq a_n \leq M, \forall n \in IN$$

Progressão aritmética (PA)
Uma sucessão (a_n) é uma progressão aritmética (P.A) se existe um número real r, tal que

$$a_{n+1} - a_n = r, \forall n \in IN$$

Ao número *r* chama – se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.A:

$$a_n = a_1 + (n-1) \times r$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão aritmética é dada por:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \times r}{2} \times n$$

Progressão geomética (PG)
Uma sucessão (a_n) é uma progressãogeotmética (P.G) se existeum número real r, tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \forall n \in IN$$

Ao número *r* chama – se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.G:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão geomética é dada por:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

Limite de uma sucessão
Sucessão convergente
Diz – se que uma sucessão (a_n) converge para um número real L

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-1} \Rightarrow S_n = 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} \Leftrightarrow S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow S_n = \left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \times \frac{3}{2} \Leftrightarrow \underset{n\to\infty}{S_n} = (1-0) \times \frac{3}{2}$$

$$S_n = \frac{3}{2}$$

21. Resposta:
Uma correspondência de *A* para *B* diz se função se cada elemento de *A* corresponde a um só elemento de *B*.
Este facto não ocorre na opção A, repare que o elemento 1 corresponde a 1 e 2 ao mesmo tempo, logo essa correspondência não é função.

22. Resposta:
A função $y = \frac{2x-1}{x+2}$ é homográfica, ela existe em IR, se e somente se o denominador for diferente de zero, assim,
$D_y = \{x \in IR : x+2 \neq 0\}$; $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$, o numero real -2, anula o denominador, logo ele não faz parte do domínio da função, dai temos: $D_y = IR \setminus \{-2\}$

23. Resposta:
Uma função real de variável real diz se bijectiva se ela for injectiva e sobrejectiva simultaneamente. Dentre essas quatros funções,

- **i.** A função exponencial é injectiva mas não é sobrejectiva;
- **ii.** A função logarítmica em geral é injectiva e sobrejectiva, logo ela é bijectiva.
- **iii.** A função seno não é injectiva e nem sobrejectiva;
- **iv.** A função quadrática não é injectiva e nem sobrejectiva.

Logo a função $g(x) = \log_2(x)$, é bijectiva.

24. Resposta:
Seja $f(x) = tg\left(\frac{x}{4}\right)$, o seu período determina - se pela fórmula: $T = \frac{\pi}{|k|}$, se $k = \frac{1}{4}$ então teremos:

$$T = \frac{\pi}{|k|} \Rightarrow T = \frac{\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|} = \frac{\pi}{\frac{1}{4}} = \pi \times 4 = 4\pi$$

25. Resposta:
O valor de $\lim_{x\to-2} \frac{x^3+8}{x^2+5x+6}$ segue com os seguintes cálculos

$\lim_{x\to-2} \frac{x^3+8}{x^2+5x+6}$, Para determinar o valor correspondente deste limite não é muito trabalhoso, basta apenas substituir oa variável por a tendência, assim:

$$\lim_{x\to-2} \frac{x^3+8}{x^2+5x+6} = \frac{(-2)^3+8}{(-2)^2+5\times(-2)+6} = \frac{-8+8}{4-10+6} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Vamos redefinir o limite, assim: $\lim_{x\to-2} \frac{x^3+8}{x^2+5x+6} = \lim_{x\to-2} \frac{x^3+2^3}{(x+2)(x+3)} =$

$$\lim_{x\to-2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x+3)} =$$

(escreve – se $\lim a_n = L$)

Se, por muito pequeno que seja o número positivo δ se existir uma ordem ***p*** a apartir da qual se tem

$|a_n - L| < \delta$, isto é, $|a_n - L|$ torna tão pequena quando se queira.

Sucessão ininitamente grande positivo

Uma sucessão (a_n) diz –se ininitamente grande positivo se e só se, qualquer que seja o número positivo L, existe uma ordm a partir da qual todos termos de (a_n) são maiores que L, ou seja

$a_n \to \infty \Leftrightarrow \forall L > 0,$

$\exists p \in IN : n > p \Rightarrow a_n > L$

Sucessão ininitamente grande negativo

Uma sucessão (a_n) diz –se ininitamente grande negativo se e só se, (- a_n) é um infinitamente drande positivo e escreve – se

$a_n \to -\infty \vee \lim a_n \equiv -\infty$

Sucessão convergente

Quando o limite de uma sucessão (a_n) é um número real, então essa sucessão diz – se convergente e escreve – se

$a_n \to b \vee \lim a_n \equiv b$

Sucessão Divergente

Quando o limite de uma sucessão (a_n) não é um número real, então essa sucessão diz – se divergente e escreve – se

$a_n \to \infty \vee \lim a_n \equiv \infty$

$ou\ a_n \to -\infty \vee \lim a_n \equiv -\infty$

Função real de Variável real (f.r.v.r)

Uma função f(x) diz – se real de variável real, se e somente se o domínio da função e o contradomínio da função são sub conjuntos de números reais.

Simbolicamente fica:

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x^2-2x+4)}{(x+3)}=\frac{(-2)^2-2(-2)+4}{-2+3}=\frac{4+4+4}{1}=12$$

26. Resposta:

O valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\cos(x)-1}$ seque com os seguintes cálculos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos(x)-1}=\frac{0^2}{\cos(0)-1}=\left[\frac{0}{0}\right]$$ Indeterminação, vamos levantar redefinindo o limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos(x)-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\cos(x)+1)}{(\cos(x)-1)(\cos(x)+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\cos(x)+1)}{\cos^2(x)-1^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\cos(x)+1)}{-(-\cos^2(x)+1^2)}=\lim_{x\to 0}-\frac{x^2(\cos(x)+1)}{(1-\cos^2(x))}=\lim_{x\to 0}-\frac{x^2(\cos(x)+1)}{sen^2(x)}=$$

$$-1.\lim_{x\to 0}\frac{x\times x(\cos(x)+1)}{sen(x)\times sen(x)}=$$

$$-1.\lim_{x\to 0}(\cos(x)+1)=-(\cos(0)+1)=-(1+1)=-2$$

27. Resposta:

Observando atentamente o gráfico, conclui se que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$

28. Resposta:

Consideremos a função real de variável real definida por troços ou ramos:

$$f(x)=\begin{cases}4x+7;\ se\ x\neq 2\\ k-1,\ se\ x=2\end{cases}$$ Para que a função *f(x)* seja continua em x=2 é necessário que se cumpra a seguinte condição:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$. Neste caso para $f(x)=k-1\Rightarrow f(2)=k-1$, a condição $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ equivale afirmar que existem o limite de *f(x)* no ponto de abcissa x=2, então podemos escrever

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)\Rightarrow 4\times 2+7=8+7\Leftrightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=15\Leftrightarrow k-1=15\Rightarrow k=16$$

29. Resposta:

Vamos calcular a primeira derivada da função $y=\sqrt{x^2-1}$, essa é uma função irracional, a sua primeira derivada determina se pelos seguintes cálculos:

$$y=\sqrt{x^2-1}\Rightarrow y'=\left(\sqrt{x^2-1}\right)\Leftrightarrow y'=\frac{(x^2-1)'}{2\sqrt{x^2-1}}\Leftrightarrow y'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\Leftrightarrow y'=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

30. Resposta:

Vamos calcular a primeira derivada da função $f(x)=(2x^3-5x+7)^4$, essa é uma função potência, a sua primeira derivada determina se pelos seguintes cálculos:

$$f(x)=(2x^3-5x+7)^4\Rightarrow f'(x)=\left[(2x^3-5x+7)^4\right]\Leftrightarrow f'(x)=4(2x^3-5x+7)^3(2x^3-5x+7)'$$

$$f'(x)=4(2x^3-5x+7)^3(6x-5)\Leftrightarrow f'(x)=4(6x-5)(2x^3-5x+7)$$

31. Resposta:

Consideremos: $f(x)=e^{2x+1}$ vamos determinar a segunda derivada da função dada e depois determinar a imagem de zero pela segunda derivada da função *f*, $f''(0)$, preste atenção nos cálculos que se seguem:

$f: IR \to IR$

$x \to y \equiv f(x)$

Uma correspondência de A para B diz se função se a cada elemento de A corresponde a um só elemento de B. Aos elementos de A chamam – se objectos e os de B chamam – se imagens.

Uma função recebe o nome de homográfica se e somente se é redutível a forma canónica (padrão)

$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, com $a, b, c, d \in IR \wedge -\dfrac{d}{c} \neq 0$

Função injectiva
Uma função *f(x)* diz – se injectiva, se objectos diferentes do dominio corresponderem sempre a imagens diferentes do contradomínio

Função sobrejctiva
Uma função *f(x)* diz – se sobrejectiva, se o contradomínio da função conscide com o conjunto de chegada.

Função bijectiva

Uma função *f(x)* diz – se bijectiva, se ela simultaneamente ser injectiva e sobrejectiva em todo seu domínio..

Exemplos de algumas funções injectivas em IR.

- Função línear (do primeiro grau) : $f(x) = ax + b$
- Função cúbica : $f(x) = ax^3$
- Função exponêncial
- Função logarítmica

Exemplos de algumas funções sobrejectivas em IR.

- Função línear (do primeiro grau) : $f(x) = ax + b$
- Função cúbica : $f(x) = ax^3$
- Função logarítmica

Exemplos de algumas funções bijectivas em IR.

$$f(x) = e^{2x+1} \Rightarrow f'(x) = \left(e^{2x+1}\right)' \Leftrightarrow f'(x) = (2x+1)'e^{2x+1} \Leftrightarrow f'(x) = 2e^{2x+1}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \left(2e^{2x+1}\right)' \Leftrightarrow f''(x) = 2(2x+1)'e^{2x+1} \Leftrightarrow f''(x) = 2 \times 2e^{2x+1} \Leftrightarrow f''(x) = 4e^{2x+1}$$

$$se\ x = 0\ entao\ f''(0) = 4 \times e^{2\times 0+1} \Leftrightarrow f''(0) = 4 \times e^{0+1} \Leftrightarrow f''(0) = 4e^1 \Rightarrow f''(0) = 4e$$

32. Resposta:

Consideremos: $f(x) = sen(x) + 2x^2$ vamos determinar a segunda derivada da função dada, preste atenção nos cálculos que se seguem:

$$f(x) = sen(x) + 2x^2 \Rightarrow f'(x) = \left(sen(x) + 2x^2\right)' \Leftrightarrow f'(x) = \cos(x) + 2 \times 2x \Leftrightarrow f'(x) = \cos(x) + 4x$$

$$\Rightarrow f''(x) = (\cos(x) + 4x)' \Leftrightarrow f''(x) = -sen(x) + 4$$

33. Resposta:

Consideremos: $f(x) = x^3 - 3x$ vamos determinar o ponto de inflexão da função dada:

$$f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = \left(x^3 - 3x\right)' \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

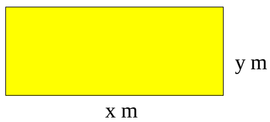
$$\Rightarrow f''(x) = \left(3x^2 - 3\right)' \Leftrightarrow f''(x) = 6x$$

Vamos determinar as raízes da segunda derivada, igualando a zero a segunda derivada:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{0}{6} \Leftrightarrow x = 0$ Vamos determinar a imagem de raiz da segunda derivada pela função f, assim, $f(0) = 0^3 - 3 \times 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$, o ponto de inflexão da função $f(x) = x^3 - 3x$ é (0;0), logo o ponto de inflexão encontra se no intervalo $\left]-1;1\right[$

34. Resposta:

Este é um problema de maximização, para a sua resolução aplica se conhecimento de *cálculo diferencial*, "derivadas", fica atento e acompanhe os cálculos!



$$P = 2(x+y) \Rightarrow 22m = 2(x+y) \Leftrightarrow 2(x+y) = 22 \Leftrightarrow$$

$$x + y = \frac{22}{2} \Leftrightarrow x + y = 11 \Rightarrow y = 11 - x$$

A área de um rectângulo é dada pela fórmula $A = c \times l \Rightarrow A = x \times y \Leftrightarrow$

Vamos definir a área como função de x, assim, $A(x) = x(x-11) \Leftrightarrow A(x) = x^2 - 11x$

Vamos determinar a primeira derivada da função Área em ordem a x: $A'(x) = \left(x^2 - 11x\right)' \Leftrightarrow A'(x) = 2x - 11$

Determinemos as raízes da primeira derivada:

$$2x - 11 = 0 \Leftrightarrow 2x = 11 \Leftrightarrow x = \frac{11}{2}$$

Já que o comprimento é x

$$x = \frac{11}{2}; x + y = 11 \Leftrightarrow y = 11 - x \Rightarrow y = 11 - \frac{11}{2} \Leftrightarrow y = \frac{22-11}{2} \Leftrightarrow y = \frac{11}{2} = 5.5$$

$$\Rightarrow c = 5.5 \wedge l = 5.5$$

O rectângulo deve ter forma de um quadrado.

35. Resposta:

- Função línear (do primeiro grau) : $f(x) = ax + b$
- Função cúbica : $f(x) = ax^3$
- Função logarítmica

Período de uma função trigonométrica.

Dada uma função trigonométrica da forma $f(x) = Asen(ax+b)+B,$ $g(x) = A\cos(ax+b)+B,$ o período destas funções determina – se pela fórmula: $T = \frac{2\pi,}{|A|}$

Dada uma função trigonométrica da forma $f(x) = Atg(ax+b)+B,$ $g(x) = A\cot g(ax+b)+B,$ o período destas funções determina – se pela fórmula: $T = \frac{\pi,}{|A|}$

Limite de uma função real de variável real

Dada uma função *f(x)* definida no domínio D_f, *a, L* são números reais. Diz – se, *L* é o limite da função *f(x)* quando *x* tende para *a* (*a* não necessariamente pertecente ao domínio de *f(x)*) sse:
$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$
e escreve – se $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Ao calcular um limite, temos que ter muito cuidado, visto que não é sempre podemos encontrar um resultado que é o número real facilmente como esperamos. No entanto, podemos depararmos com as seguintes situações:

$\left[\frac{0}{0}\right], [\infty - \infty], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty^0]...$ estas situações não são números reais, são chamado de indeterminações.

Continuidade de uma função num ponto.

Uma função real de variàvel real é contínua num ponto de abcissa $x = a$ sse,

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

Considerando e observando com muita atenção o gráfico dado, a primeira derivada é negativa no intervalo de $]-1;1[$. Se se traçarmos uma recta tangente em qualquer ponto de abcissa que esta neste intervalo, o ângulo formado entre essa recta e o sentido positivo do eixo das abcissas é maior que a amplitude de um ângulo recto.

- **<u>Somente para a Secção de Letras</u>**

36. Resposta:

Vamos determinar o resto da divisão entre $-x^3 + 7x^2 - 12x - 10,$ por $x + 2$. Para isso vamos:

$-x^3 + 7x^2 - 12x - 10$	$x + 2$
$+x^3 + 2x^2 + 0x + 0$	$-x^2 + 9x - 30$
$9x^2 - 12x - 10$	
$-9x^2 - 18x + 0$	
$-30x - 10$	
$+30x + 60$	
50	

O resto da divisão é igual a 50. O mesmo valor pode ser encontrado da pelo seguinte cálculos:

$$-x^3 + 7x^2 - 12x - 10, \ se \ x = -2 \Rightarrow -(-2)^3 + 7 \times (-2)^2 - 12(-2) - 10 =$$
$$= -(-8) + 7 \times 4 + 24 - 10 = 8 + 28 + 24 - 10 = 60 - 10 = 50 \Rightarrow R(x) = 50$$

37. Resposta:

Considere a equação $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = 0$, vamos resolver em IR:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{matrix} \Bigg| = 0 \Leftrightarrow (3k + 0 + 0) - (0 + 0 - 2k) = 0 \Leftrightarrow 5k = 0 \Rightarrow k = 0$$

38. Resposta:

Vamos simplificar a expressão $\overline{M \cap \left(\overline{N \cap M}\right)}$, aplicando as propriedades de operações sobre conjuntos, assim:

$$\overline{M \cap \left(\overline{N \cap M}\right)} \Leftrightarrow \overline{M} \cup \left(\overline{\overline{N \cap M}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \overline{M} \cup (N \cap M) \Leftrightarrow \left(\overline{M} \cup N\right) \cap \left(\overline{M} \cup M\right) \Leftrightarrow \left(\overline{M} \cup N\right) \cap U \Leftrightarrow \overline{M} \cup N$$

39. Resposta:
Observando atentamente a figura fica claro que o número de alunos que preferem pelo menos dois tipos de refrigerantes são 24, acompanhe os cálculos que se seguem:

40. $n(F \cup C \cup S) = n(F \cap C) + n(F \cap S) + n(C \cap S) + n(F \cap C \cap S) = 8 + 1 + 6 + 9 = 24$

Resposta: Vamos calcular o valor de $\lim_{x \to 4} \frac{3 - \sqrt{x+5}}{x - 4}$, acompanhe os cálculos com muita atenção:

$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Cálculo diferencial

- **Definição da derivada de uma função**

Dada uma função *F(x)* definida no domínio D_F, sendo *a* abcissa de um ponto P, tal que $a \in D_F$. A derivada da função *F(x)* no ponto P é dada pela expressão:

$$F^{/}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{a-h} \quad \text{ou}$$

$$F^{/}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{x-h} = f(x)$$

A função *f(x)* chama – se a primeira derivada.

Regras de derivação imediata

Função constante

$f(x) = k \Rightarrow \quad f'(x) = 0$

Função potência

$f(x) = x^n \Rightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}$

Função polinomial

Função composta

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n \Rightarrow$

$f'(x) = (a_0x^n)' + (a_1x^{n-1})' + ... + (a_n)'$

Derivada da soma

$f(x) = u \pm v \Rightarrow \quad f'(x) = u' \pm v'$

Função afim

$f(x) = ax + b \Rightarrow \quad f'(x) = a$

Função produto

$f(x) = u \times v \Rightarrow \quad f'(x) = u'v + uv'$

Função quociente

$f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Função composta

$f(x) = u^n \Rightarrow \quad f'(x) = nu^{n-1}u'$

Derivada da função exponêncial

Função exponêncial de base *e*

$f(x) = e^u \Rightarrow \quad f'(x) = u'e^u$

Função exponêncial de base *a*

$f(x) = a^u \Rightarrow \quad f'(x) = u'a^u \ln(a)$

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

$$\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{x+5}}{x-4} = \frac{3-\sqrt{4+5}}{4-4} = \frac{3-\sqrt{9}}{0} = \frac{3-3}{0} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Este não é um número real, é uma indeterminação

Vamos levantar essa indeterminação redefinindo o limite:

$$\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{x+5}}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{(3-\sqrt{x+5})(3+\sqrt{x+5})}{(x-4)(3+\sqrt{x+5})} = \lim_{x\to 4} \frac{\left(3^2 - (\sqrt{x+5})^2\right)}{(x-4)(3+\sqrt{x+5})} =$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{9-(x+5)}{(x-4)(3+\sqrt{x+5})} = \lim_{x\to 4} \frac{9-x-5)}{(x-4)(3+\sqrt{x+5})} =$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{4-x}{(x-4)(3+\sqrt{x+5})} =$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{-1}{(3+\sqrt{x+5})} = \frac{-1}{3+\sqrt{4+5}} = \frac{-1}{3+\sqrt{9}} = \frac{-1}{3+3} = -\frac{1}{6}$$

• **<u>Somente para a Secção de Ciências</u>**

36. Resposta:

Consideremos o ponto $P(1;1)$ e a recta *r*, da equação *r*: $(k-2)x - 4y + 20 = 0$

Para que o ponto $P(1;1)$ pertença a recta r, necessário que a recta r incida o ponto *P*, assim:

$(k-2)x - 4y + 20 = 0 \Rightarrow (k-2)\times 1 - 4\times 1 + 20 = 0 \Leftrightarrow k - 2 - 4 + 20 = 0 \Leftrightarrow k - 6 + 20 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k + 14 = 0 \Rightarrow k = -14$

37. Resposta:

Vamos determinar a função inversa da função $f(x) = \log_3(x) - 2$ vamos aplicar directamente a definição do logaritmo:

$f(x) + 2 = \log_3(x) \Leftrightarrow x = 3^{f(x)+2} \Rightarrow f^{-1}(x) = 3^{x+2}$

38. Resposta:

Seja $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_3(x+9)$ pede se para determinar $(fog)(0)$.

$(fog)(0) = 2^{\log_3(0+9)} \Leftrightarrow (fog)(0) = 2^{\log_3(9)} \Leftrightarrow (fog)(0) = 2^2 = 2\times 2 = 4$

39.Resposta:

A expressão equivalente do número complexo $\frac{3}{2+i}$;

$$\frac{3}{2+i} \Leftrightarrow \frac{3(2-i)}{(2+i)(2-i)} \Leftrightarrow \frac{6-3i}{2^2 - i^2} \Leftrightarrow \frac{6-3i}{4-(-1)} \Leftrightarrow \frac{6-3i}{4+1} \Leftrightarrow \frac{6-3i}{5}$$

40.Resposta:

A que é igual $\int (e^x + 5senx)dx$? Ela chama - se integral indefinida em ordem a variável *x* e calcula se da seguinte maneira:

$$\int (e^x + 5senx)dx = \int e^x dx + \int 5senxdx = e^x + c_1 + 5\int senxdx = e^x + c_1 + 5(-\cos x) + c_2 =$$

$$\int (e^x + 5senx)dx = e^x + c_1 - 5\cos x + c_2 \Leftrightarrow e^x - 5\cos x + \underbrace{c_1 + c_2}_{C} =$$

$$= e^x - 5\cos x + C$$

FIM

Derivada da função logarítmica
Função logarítmica de base *e*

$$f(x)=\ln(u)\Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'}{u}$$

Função logarítmica de base *a*

$$f(x)=\log_a(a)\Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{u'}{u\ln(a)}$$

Derivada da função trigonométrica
Função seno

$$f(x)=sen(x)\Rightarrow \quad f'(x)=\cos(x)$$

$$f(x)=sen(u)\Rightarrow \quad f'(x)=u'\cos(u)$$

Função co-seno

$$f(x)=\cos(x)\Rightarrow \quad f'(x)=-sen(x)$$

$$f(x)=\cos(u)\Rightarrow \quad f'(x)=-u'\,sen(u)$$

Cálculo integral – primitiva de uma função

As regras de primitivação de funções obtém – se através das regras de derivação, assim temos:

1. $\int (k)dx=kx+c$
2. $\int (ku)dx=k\int xdx$
3. $\int u^n u'\,dx=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$
4. $\int (u\pm v)dx=\int udx+\int vdx$
5. $\int \frac{u'}{u}dx=\ln|u|+C$
6. $\int e^u u'\,dx=e^u+c$
7. $\int a^u u'\,dx=\frac{a^u}{\ln(a)}+C$
8. $\int \sin xdx=-\cos x+C$
9. $\int \cos xdx=\sin x+C$

Integração por parte

$$\int uv'\,dx=uv-\int u'vdx$$

Números complexos

O número cujo o quadrado é igual a -1 representa – se por i.

$i^2=-1$ e $i=\sqrt{-1}$

Ao número i, chama – se unidade

imaginária.

Definição do número complexo

Um número complexo é qualquer número que tem a forma $a+ib$, onde $i^2=-1$ e $a,b\in IR$

O conjunto dos números complexos normalmente representa – se pela letra C.

Exemplos de números complexos:

$3+2i,\ \frac{1}{3}-i\sqrt{5},\ 5i,\ -4+\frac{2}{7}i$

Resolução de Exame de Matemática – 12ª. Classe
Ano: 2015/ 1ª Época

- **Conceitos básicos**

Operações sobre proposições lógicas

Na lógica matemática estdaa – se as seguintes operações sobre proposições:

1. **Negação de uma proposição**
2. **Conjuncão de proposições**
3. **Disjunção de proposições**
4. **Implicação material**
5. **Equivalência materail**

Expressão algebrica

Uma expressão algebrica diz – se irracional quando a variável aparece sob forma de um radicando.
Repare qu a expressão do número 3, a variável aparece dentro do radical com índice 3, e a varável aparece também sob forma de denominador, visto que não existem um número real que pode anular o denominador, razão pelo qual todo número real define a expressão dada.

Equação

Já foi dito que uma equação é a comparação de duas expressões designatórias por meio de símbolo de igualdade.

Equação exponêcial: é toda equação em que a incógnita aparece sob forma de um expoente de base *a*, sendo *a* positivo e diferente de unidade.

Determinantes de sistemas de equações líneares

A representação da forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ chama – se

determinante proviniente de uma matriz de 3 por 3

Exame de Matemática – 12ª classe, Ano: 2015/ 1ª Época

Resoluções

1. **Resposta:**
A operação lógica que sempre associa duas proposições com mesmo valor lógico numa proposição verdadeira é a equivalência material.

2. **Resposta:**
A negação da expressão $2+5>7$ é:
Seja $p: 2+5>7 \Rightarrow \sim p: \sim(2+5>7) \Leftrightarrow \sim p: 2+5\leq 7$.

3. **Resposta:**
A expressão $\frac{x}{x^2+1}-\sqrt[3]{x+1}$ é algébrica irracional, o seu domínio é:

$$D=\{x\in R: x^2+1\neq 0\}\Rightarrow x^2+1\neq 0 \Leftrightarrow x\in IR$$

$$D=R$$

4. **Resposta:**

Resolvendo a equação $2^x+2^{x+1}=6$, teremos:

$$2^x+2^{x+1}=6\Leftrightarrow 2^x+2.2^x=6\Leftrightarrow 2^x(1+2)=6\Leftrightarrow 2^x.3=6\Leftrightarrow 2^x=\frac{6}{3}\Leftrightarrow 2^x=2\Leftrightarrow x=1.$$

5. **Resposta:**

Consideremos a equação $x+\frac{1}{x}=10$, desenvolvendo teremos:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=10^2\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=100\Leftrightarrow x^2+2+\frac{1}{x^2}=100\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=100-2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=98$$

6. **Resposta:**

Vamos calcular o valor de seguinte determinante: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=(2\times3\times5+1\times2\times0+4\times(-1)\times0)-(4\times3\times0+2\times2\times0+1\times(-1)\times5)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=(30+0+0)-(-5))=30+5=35$$

7. **Resposta:**

Razões trigonométricas de alguns arcos

x	0	30	45	60	90
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tag	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0
ctg	ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	ND

Fórmula fundamental da trigonometria

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$$

Outras relações trigonométricas

$$tg(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$ctg(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Módulo ou valor absoluto de um número real

Chama – se módulo ou valor absoluto de um número real x ao próprio nómero se este for não negativo ou ao seu simétrico se este for negativo.

$$|x|=\begin{cases} x, se\, x\geq 0 \\ -x, se\, x<0 \end{cases}$$

Equação modular: é toda equação que por meio de princípios de equivalência é redutível a forma:

$$|x|=a$$

A solução da equação acima segue:

$$|x|=a \Leftrightarrow x=a \vee x=-a$$

Factorial de um número natural

O factorial de um número natural n é dado por:

$$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 1$$

Exemplo:

$$5!=5\times4\times3\times2\times1$$

$$5!=120$$

Permutação

A permutacao de n elementos tomados p a p, é dado por:

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

Vamos resolver a inequação $\frac{2x-1}{x+3}>0$ por auxílio de uma tabela de variação de sinal. Seja $2x-1=0 \wedge x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \wedge x=-3$

x	$\left]-\infty;-3\right[$	-3	$\left]-3;\frac{1}{2}\right[$	$\frac{1}{2}$	$\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$
$2x-1$	—	-7	—	0	+
$x+3$	—	0	+	$\frac{7}{2}$	+
$\frac{2x-1}{x+3}$	+	ND	—	0	+

A fracção $\frac{2x-1}{x+3}$ é menor que zero se e somente se $x\in\left]-\infty;-3\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, logo

$\frac{2x-1}{x+3}>0$ se $x\in\left]-\infty;-3\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

8. Resposta:

O valor numérico da expressão $\frac{-sen(5\pi)+\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)}{tg\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$, segue:

$$\frac{-sen(5\pi)+\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)}{tg\left(\frac{5\pi}{4}\right)}=\frac{-sen(5\times180^o)+\cos\left(-\frac{3}{2}\times108^o\right)}{tg\left(\frac{5\times180^0}{4}\right)}=$$

$$\frac{-sen(900^o)+\cos(-270^o)}{tg(225^o)}=\frac{-sen(180^o)+0}{1}=\frac{0+0}{1}=\frac{0}{1}=0$$

9. Resposta:

A expressão simplificada de $\frac{2sen(x)-tg(x)}{2\cos(x)-1}$ segue:

$$\frac{2sen(x)-tg(x)}{2\cos(x)-1}\Leftrightarrow\frac{2sen(x)-\frac{sen(x)}{\cos(x)}}{2\cos(x)-1}\Leftrightarrow\frac{\frac{2sen(x)\cos(x)-sen(x)}{\cos(x)}}{2\cos(x)-1}\Leftrightarrow\frac{sen(x)(2\cos}{(2\cos(x)-1}$$

$$\Leftrightarrow\frac{sen(x)}{\cos(x)}\Leftrightarrow tg(x)$$

10. Resposta:

A condição para que $|1-3x|-x+8=9-4x$ seja verdadeira segue:

$$|1-3x|-x+8=9-4x\Leftrightarrow$$

$P_n = n!$ ou

$P_n = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 1$

$n \equiv p$

Exemplo:

$p_4 = 4\times 3\times 2\times 1$

$p_4 = 24$

Aranjos Simples

Aranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!},\ n > p$$

Exemplo:

$$A_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} \Leftrightarrow A_2^4 = \frac{4!}{2!}$$

$$A_2^4 = \frac{4\times 3\times 2!}{2!} \Leftrightarrow A_2^4 = 12$$

Combinação simples

Combinação simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)!\times p!},\ n > p$$

Exemplo:

$$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{4!}{2!\times 2!}$$

$$C_2^4 = \frac{4\times 3\times 2!}{2\times 1\times 2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{12}{2}$$

$$C_2^4 = 6$$

Binómio de Newton

Binómio de Newton é uma expressão que envolve combinação simples, essa expressão é usada para desenvolver os polinómios que aparecem sob forma de binómios potenciais

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + \ldots + C_n^n y^n$$

Definição clássica de Probabilidade

Se os acontecimentos elemntares forem equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimnto e o número de casos possíveis.

$$\Leftrightarrow |1-3x| - x + 8 = 9 - 4x \Leftrightarrow |1-3x| = 9 - 4x + x - 8 \Leftrightarrow |1-3x| = 1-3x$$

Pela definição do módulo de um número real temos:

$$|1-3x| = \begin{cases} 1-3x,\ se\ 1-3x \geq 0 \\ -(1-3x),\ se 1-3x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

A condição para que $|1-3x| - x + 8 = 9 - 4x$ seja verdadeira é

$$1-3x \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq \frac{-1}{-3} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$$

11. Resposta:

Vamos resolver a equação modular $|5x-1| = x+3$ e depois somar os elementos do conjunto solução:

$$|5x-1| = x+3 \Leftrightarrow$$

$$5x-1 = x+3 \vee 5x-1 = -x-3 \Leftrightarrow$$

$$5x - x = 3+1 \vee 5x + x = -3+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x = 4 \vee 6x = -2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{4} \vee x = -\frac{2}{6} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\frac{1}{3} \Rightarrow S = 1 + \left(-\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow S = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3}$$

12.Resposta:

O número que representa $\frac{5!+6!}{6!}$ segue:

$$\frac{5!+6!}{6!} = \frac{5!+6\times 5!}{6\times 5!} = \frac{5!(1+6)}{6\times 5!} = \frac{1+6}{6} = \frac{7}{6}$$

13. Resposta:

Vamos desenvolver a expressão $(x+2)^8$, assim:

$$(x+2)^8 = C_0^8 x^8 2^0 + C_1^8 x^7 2^1 + C_2^8 x^6 2^2 + C_3^8 x^5 2^3 + C_4^8 x^4 2^4 + C_5^8 x^3 2^5 + C_6^8 x^2 2^6 +$$

Repare que o sexto termo é $C_4^8 x^4 2^4$

14. Resposta:

O número total de comissões formado por homens e mulheres, sendo cada comissão tem 3 elementos é dado por C_3^7. O número total de comissões formado por apenas mulheres é dado por C_3^4, foi dito no problema que em cada comissão deve ter pelo menos um homem, isto significa as comissões deve ter um homem ou dois, neste caso temos que retirar a possibilidade de ter comissões formadas por três mulheres, assim:

$$nCP = C_3^7 - C_3^4 \Leftrightarrow nCP = \frac{7!}{(7-3)!.3!} - \frac{4!}{(4-3)!.3!} = \frac{7\times 6\times 5\times 4!}{4!\times 3!} - \frac{4\times 3!}{1!\times 3!} = 35 - 4 = 31$$

, o número de comissões possíveis a criar são 31.

15.Resposta:

Vamos representar o espaço amostral deste fenómeno aleatório (experimento aleatório):

$\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}$, o evento cair faces diferentes tem seguinte elementos: $A = \{CC, KK \Rightarrow n(\Omega) = 4 \wedge n(A) = 2\}$, os eventos elementares do espaço amostral Ω são equipróvaveis e mutuamente excludentes dois a dois, pois é um espaço amostral enumerável e finito, portanto podemos aplicar a definição de Laplace para resolver este problema, assim:

$$P(A)=\frac{n(C.F)}{n(C.P)},\ n(CF)\geq n(CP)$$

Limite de uma sucessão

Sucessão convergente

Diz – se que uma sucessão (a_n) converge para um número real L (escreve – se $\lim a_n = L$)

Se, por muito pequeno que seja o número positivo δ se existir uma ordem ***p*** a apartir da qual se tem

$|a_n - L| < \delta$, isto é, $|a_n - L|$ torna tão pequena quando se queira.

Progressão aritmética (PA)

Uma sucessão (a_n) é uma progressão aritmética (P.A) se existe um número real r, tal que

$$a_{n+1}-a_n=r, \forall n\in IN$$

Ao número *r* chama – se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.A:

$$a_n=a_1+(n-1)\times r$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão aritmética é dada por:

$$S_n=\frac{2a_1+(n-1)\times r}{2}\times n$$

Progressão geométrica (PG)

Uma sucessão (a_n) é uma progressãogeotmética (P.G) se existeum número real r, tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=r, \forall n\in IN$$

Ao número *r* chama – se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.G:

$$a_n=a_1\times r^{n-1}$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão geométrica é dada por:

$$S_n=a_1\times\frac{1-r^n}{1-r}$$

Algumas operações com infinitos

1. $k\times\infty=\infty$
2. $\infty^k=\infty$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}\Rightarrow P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0.5$$

16. Resposta:

Uma sucessão diz se infinitamente pequena quando o limite dessa sucessão tende para zero quando o valor de *n* tende para infinito, sendo assim a sucessão da opção A é infinitamente pequena, assim,

$$\frac{n-1}{(n+1)^2}\Rightarrow \lim\left(\frac{n-1}{(n+1)^2}\right)=\lim\left(\frac{n-1}{n^2+2n+1}\right)=\lim\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0$$

17. Resposta:

Seja $a_n=\frac{2n+1}{n};\ \delta=0.02=\frac{2}{100}\wedge L=2$

Pela definição de limite de uma sucessão, tem: $\lim\frac{2n+1}{n}=L\Rightarrow\left|\frac{2n+1}{n}-L\right|<\delta$

, isso pode se escrever da seguinte maneira:

$$\left|\frac{2n+1}{n}-L\right|<\delta\Leftrightarrow\frac{2n+1}{n}-L<\delta\wedge\frac{2n+1}{n}-L>-\delta\Rightarrow L-\delta<\frac{2n+1}{n}<L+\delta$$

$$\Leftrightarrow 2-0.02<\frac{2n+1}{n}<2+0.02\Leftrightarrow 2-\frac{2}{100}<\frac{2n+1}{n}<2+\frac{2}{100}\Leftrightarrow 2-\frac{1}{50}<\frac{2n}{n}+\frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow 2-\frac{1}{50}<2+\frac{1}{n}<2+\frac{1}{50}\Leftrightarrow-\frac{1}{50}<\frac{1}{n}<\frac{1}{50}\Rightarrow n>50.$$

R: A partir de ordem 50, os termos da sucessão $a_n=\frac{2n+1}{n}$, encontra se a menos de 0.02 do limite 2.

18. Resposta:

Considere a sucessão $18,15;12;9;6;;...$

Fazendo

$$a_1=18;\ a_2=15;\ a_3=12;\ a_4=9; a_5=6...\Rightarrow 6-9=9-12=12-15=15-18=-$$

a diferença entre $a_{n+1}\ e\ a_n$ é constante pois é igual a -3 unidades.

$$a_n=a_1+(n-1)d\Rightarrow a_n=18+(n-1)\times(-3)\Leftrightarrow a_n=-3n+3+18\Leftrightarrow a_n=-3n+2$$

19. Resposta:

Vamos aplicar directamente a formula da soma de n termos de PA,

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\times n$$

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\times n\ ,\ a_1=3, d=2,\ n=6\wedge\Rightarrow S_6=\frac{4+4+(6-1)\times 2}{2}\times 6=(8+5\times 2)\times 3$$

$$=54$$

20. Resposta:

Dado que numa PG de 5 termos, tem se $a_1=3\wedge a_5=48$

$$a_n=a_1\times q^{n-1}\Rightarrow 48=3q^{5-1}\Leftrightarrow 16=q^4\Leftrightarrow q^4=16\Leftrightarrow q^4=2^4\Rightarrow q=2$$

$$\therefore a_n=3\times 2^{n-1}\Rightarrow a_3=3\times 2^{3-1}\Leftrightarrow a_3=3\times 2^2\Leftrightarrow a_3=3\times 4\Leftrightarrow a_3=12$$

21.Resposta:

A função que não é injectiva é da opção **B**.

22. Resposta:

3. $\infty \times \infty = \infty$

4. $k + \infty = \infty$

5. $k - \infty = -\infty$

6. $\dfrac{\infty}{k} = \infty$

7. $\dfrac{k}{\infty} = 0$

Limite de uma função real de variável real

Dada uma função *f(x)* definida no domínio D_f, *a*, *L* são números reais. Diz – se, *L* é o limite da função *f(x)* quando *x* tende para *a* (*a* não necessariamente pertecente ao domínio de *f(x)*) sse:

$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

e escreve – se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Conheça alguns limites notáveis

- **Limites Neperianos**

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^k$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

- **Limites trigonométricass**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Continuidade de funções reais de variáveis reais

Uma função real de variàvel real é contínua num ponto de abcissa $x = a$ sse,

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Se existir a diferença entre os mmbros dessa igualdade, a função é descontinua no ponto de abcissa *a*

Dada as funções $f(x) = 2^x;\ g(x) = sen(x);\ h(x) = x^2 + 5,\ m(x) = x^3$

A proposição falsa é da opção **C**: *f* e *g* não tem zeros, porque os seus gráficos não intersectam o eixo das abcissas xx'

23. Resposta:

A afirmação correcta é da opção **B**: $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 1 \wedge f(3) = 0$

24. Resposta:

O valor de $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4}$ segue:

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4} = \dfrac{3 \times 2^2 - 2 - 10}{2^2 - 4} = \dfrac{12 - 12}{4 - 4} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ Vamos redefinir o limite, assim,

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{3(x-2)\left(x + \frac{5}{3}\right)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{3(x - \frac{5}{3})}{(x+2)} =$$

$$3 \times \lim_{x \to 2} \frac{\left(x + \frac{5}{3}\right)}{x+2} = 3 \times \frac{(2 + \frac{5}{3})}{2+2} =$$

$$3 \times \frac{\frac{6+5}{3}}{4} = 3 \times \frac{\frac{11}{3}}{4} = 3 \times \frac{11}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$$

25. Resposta:

O valor de $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - x + 3}{3x^3 - 4}$ segue:

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - x + 3}{3x^3 - 4} = \dfrac{\infty^2 - \infty + 3}{3 \times \infty^3 - 4} = \dfrac{\infty - \infty}{\infty} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

Vamos levantar a indeterminação:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x + 3}{3x^3 - 4} \Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{3x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{3x} = \frac{1}{3 \times \infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

26. Resposta:

O valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen^2(x)}{x}$ segue

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen^2(x)}{x} = \dfrac{sen^2(0)}{0} = \dfrac{0^2}{0} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ Vamos levantar a indeterminação:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen^2(x)}{x} \Leftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{sen(x)sen(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} \times sen(x) = \lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} \times \lim_{x \to 0} sen(x) = 1 \times$$

$$= 1 \times 0 = 0$$

27. Resposta:

Calculando o valor de $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{5}{x}\right)^x$

Baseando no limite *nepereiano* $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{k}{x}\right)^x = e^k$ teremos:

Cálculo diferencial

- **Definição da derivada de uma função**

Dada uma função *F(x)* definida no domínio D_F, sendo *a* abcissa de um ponto P, tal que $a \in D_F$. A derivada da função *F(x)* no ponto P é dada pela expressão:

$$F^{/}(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{a-h} \text{ ou}$$

$$F^{/}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x-h} = f(x)$$

A função *f(x)* chama – se a primeira derivada.

Regras de derivação imediata

Função constante

$f(x)=k \Rightarrow \quad f'(x)=0$

Função potência

$f(x)=x^n \Rightarrow \quad f'(x)=nx^{n-1}$

Função polinomial

Função composta

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n \Rightarrow$

$f'(x)=(a_0x^n)'+(a_1x^{n-1})'+...+(a_n)'$

Derivada da soma

$f(x)=u\pm v \Rightarrow \quad f'(x)=u'\pm v'$

Função afim

$f(x)=ax+b \Rightarrow \quad f'(x)=a$

Função produto

$f(x)=u\times v \Rightarrow \quad f'(x)=u'v+uv'$

Função quociente

$f(x)=\frac{u}{v} \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Função composta

$f(x)=u^n \Rightarrow \quad f'(x)=nu^{n-1}u'$

Derivada da função exponêncial

Função exponêncial de base *e*

$f(x)=e^u \Rightarrow \quad f'(x)=u'e^u$

Função exponêncial de base *a*

$f(x)=a^u \Rightarrow \quad f'(x)=u'a^u\ln(a)$

Derivada da função logarítmica

Função logarítmica de base *e*

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^x = e^5$$

28. Resposta:

Consideremos a função real de variável real definido por troços ou ramos:

$f(x)=\begin{cases}2x-3, se\ x\le 0\\ k-4,\ se\ x>0\end{cases}$ Para que a função *f*(*x*) seja continua em x=0 é necessário que se cumpra a seguinte condição:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$. Neste caso para $f(x)=2x-3 \Rightarrow f(0)=-3$, a condição $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ equivale afirmar que existem o limite de *f(x)* no ponto de abcissa x=0, então podemos escrever

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow 2.0-3=k-4 \Leftrightarrow -3=k-4 \Leftrightarrow k=-3+4 \Rightarrow k=1$$

29. Resposta:

Consideremos a função real de variável real definido por troços ou ramos:

Para que a função *f*(*x*) seja continua em *x*=*a* é necessário que se cumpra a seguinte condição:

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

$$f(x)=\begin{cases}2x-1;\text{ se } x<2\\ x^2-5:\text{ se } 2\le x<3\\ x+1;\text{se } x>3\end{cases}$$

- Vamos estudar a continuidade da função no ponto de abcisa 2, assim,

  $\lim\limits_{x\to 2^-}(2x-1)=3$

  $\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-5)=-1$

  $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\ne \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ logo não existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

  A função é descontinua no ponto de abcisa 2

- Vamos estudar a continuidade da função no ponto de abcisa 3, assim,

  $\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-5)=4$

  $\lim\limits_{x\to 3^+}(x+1)=4$

  $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=4$

  $f(3)=4$

  $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)$ A função é continua no ponto de abcisa 3

  A função *f(x)* tem ponto de descontinuidade no ponto de abcissa *x=2*, porque apresenta um salto neste ponto, ou seja a função não é tem limites laterais iguais neste ponto

30. Resposta:

A opção correcta é A, porque é verdade afirmar que uma função derivada gera variação do sinal da função.

31. Resposta:

Observando rigorosamente o gráfico, no enunciado conclui - se $f'(2)=1$

Consideremos a função real de variável real definido por troços ou ramos:

Repare que em $x\in\left]-\infty-1\right] \Rightarrow f(x)=x+3 \Rightarrow f'(x)=(x+3)'=1$

$f(x)=\ln(u) \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{u'}{u}$

Função logarítmica de base *a*

$f(x)=\log_a(a) \Rightarrow$

$f'(x)=\dfrac{u'}{u\ln(a)}$

Derivada da função trigonométrica
Função seno

$f(x)=sen(x) \Rightarrow \quad f'(x)=\cos(x)$

$f(x)=sen(u) \Rightarrow \quad f'(x)=u'\cos(u)$

Função co-seno

$f(x)=\cos(x) \Rightarrow \quad f'(x)=-sen(x)$

$f(x)=\cos(u) \Rightarrow \quad f'(x)=-u'sen(u)$

Intervalos de monotonia e primeira derivada de uma função

Teorema

Seja *f* uma função contínua em $[a,b]$ e derivavel em]a, b[.

- Se $f'(x)>0$ para todo $x\in]a,b[$, então f é estritamente crescente em $[a,b]$
- Se $f'(x)<0$ para todo $x\in]a,b[$, então f é estritamente decrescente em $[a,b]$

Máximos e mínimos absolutos e primeira derivada de uma função

Teorema

Seja *f* uma função contínua em $[a,b]$ e tem um máximo ou um mínimo em ***c*** do intervalo $]a,b[$, então $f'(c)=0$ ou $f'(c)$ não existe.

Um elemento *c* do domínio de uma função *f* é um ponto crítico de *f* se então $f'(c)=0$ ou $f'(c)$ não existe.

Álgebra
Polinómios

É uma soma de monómios não semelhantes

Um polinómio de uma variável tem a seguinte fórmula geral:

$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$

Onde

32. Resposta:

Considere a função $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln(x)$, a primeira derivada segue:

33. Resposta:

Considere a função f que se segue e determine a imagem de 180° pela primeira derivada da função f

$f(x)=sen(2x)$

$f(x)=sen(2x) \Rightarrow f'(x)=(sen(2x))' \Leftrightarrow f'(x)=(2x)'\cos(2x) \Leftrightarrow f'(x)=2\cos(2x),\ x=\pi$

$\Rightarrow f'(\pi)=2\cos(2\pi) \Leftrightarrow f'(\pi)=2\times1=2$

34. Resposta:

Consideremos: $f(x)=e^{2x+1}$ vamos determinar a segunda derivada da função dada:

$f(x)=e^{2x+1} \Rightarrow f'(x)=\left(e^{2x+1}\right)' \Leftrightarrow f'(x)=(2x+1)'e^{2x+1} \Leftrightarrow f'(x)=2e^{2x+1}$

$\Rightarrow f''(x)=\left(2e^{2x+1}\right)' \Leftrightarrow f''(x)=2(2x+1)'e^{2x+1} \Leftrightarrow f''(x)=2\times2e^{2x+1} \Leftrightarrow f''(x)=4e^{2x+1}$

$f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}+\ln(x)\right)' \Leftrightarrow f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)'+(\ln(x))'=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x'}{x}=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x^2}$

35. Resposta:

Vamos chamar desses números por *x* e *y*, então teremos:

$x-y=6 \ \wedge P=xy \Rightarrow y=x-6 \Rightarrow P(x)=x(6-x) \Leftrightarrow P(x)=-x^2+6x$,

no problema foi dito que o produto entre *x* e *y* é um mínimo, então:

$P'(x)=\left(-x^2+6x\right)'=-2x+6 \Rightarrow -2x+6=0 \Leftrightarrow -2x=-6 \Leftrightarrow x=\dfrac{-6}{-2} \Rightarrow x=3$

$x-y=6 \Rightarrow 3-y=6 \Leftrightarrow -y=6-3 \Leftrightarrow -y=3 \Rightarrow y=-3$

Os dois números procurados são: -3 e 3

- <u>**Somente para secção de Letras**</u>

36. Resposta:

Dado o polinómio

$P(x)=4x^3-2x^2+x-3$ *e* $x-1$, o polinómio quociente entre P(x) por $x-1$ pode ser determinado por regra de *Rufim*, assim:

	4	-2	1	-3
1				
	4	2	3	0

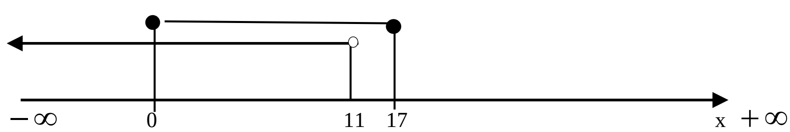
Logo:

$\dfrac{P(x)}{x-1}=\dfrac{4x^3-2x^2+x-3\ e\ x-1}{x-1}=4x^2+2x+3 \Rightarrow Q(x)=4x^2+2x+3$

37. Resposta:

Dados os conjuntos $M=]-\infty;11[$, $N=[0;17]$ no universo IR, vamos determinar $\overline{M\setminus N}$

Comecemos por representar num eixo real os conjuntos dados:



$a_0,\ a_1, a_2, \ldots, a_n \in IR \wedge n \in IN$

Regra de Ruffin

É uma regra que é usada para determinar o quociente entre o polinómio de grau *n* e um binómio línear *x - a*.

Teoria de Conjunto

Conjunto é uma colecção de objectos da mesma espécie.

Operações sobre conjuntos

1. Reunião de conjuntos
2. Intersecção de conjuntos
3. Diferença de conjuntos
4. Complementar de conjuntos

Geometria analítica

Dado um ponto P(x_0, y_0) e recta r: $Ax + Bx + C = 0$ no plano, a distância entre o ponto P e a recta *r* representada por d(P, r) é dada por:

$$d(P,r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Função homográfica

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, com\ cx + d \neq 0$$

Números complexos

Para responder o número 38 é preciso ter conhecimentos profundo de números complexos conjugados

Números complexos conjugados

Dois números complexos dizem – se conjugados quando tem partes reais iguais e partes imaginárias simétricas. O onjugado de número complexo z representa – se por $\bar{z}$

Exemplo:

$3 + 4i \wedge 3 - 4i$ são dois números complexos conjugados.

Prmitiva de uma função

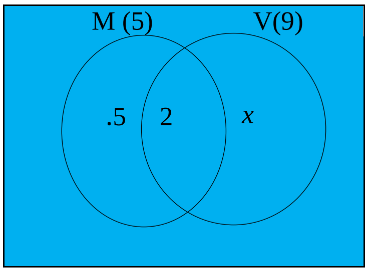
As regras de primitivação de funções obtém – se através das regras de derivação, assim temos:

$\int (k)dx = kx + c$

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

Repare que $\overline{M \setminus N} =]0;+\infty[$

38. Resposta ao problema:



n(U)=?

$n(M \cup V) = ?$

$\Rightarrow n(M \cup V) = \Leftrightarrow n(M) + n(V) + n(M$

$n(M \cup V) = 5 + 7 + 2 = 14$

São 14 pessoas que estavam na festa.

39. Resposta:

$$f(x) = k^3 \wedge g(x) = x^2 - 1$$

$$f(3) = g(k) \Leftrightarrow k^3 = 3^2 - 1 \Leftrightarrow k^3 = 9 - 1 \Leftrightarrow k^3 = 8 \Leftrightarrow k = \sqrt[3]{8} \Rightarrow k = 2$$

40. Resposta:

O gráfico que representa uma função impar é da opção C

- **Somente Para Secção de Ciências**

36. Resposta:

Dado o ponto P(1;4) e a equação da recta r: *3x-4y+6=0*

De uma forma geral a distância entre um ponto e uma recta no plano é dada pela equação

$$d(P,r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \Rightarrow d(P,r) = \frac{|3 \times 1 - 4 \times 4 + 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3 - 16 + 6|}{\sqrt{25}} = \frac{|7|}{5} = \frac{7}{5}$$

37. Resposta:

Dada a função $f(x) = \dfrac{2x+6}{x-1}$

A função dada chama se homógrafa, ela é da família com forma padrão

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, com\ cx + d \neq 0$$

De uma forma geral a equação da assimptota vertical é dada por

$$x = \frac{a}{c}; a = 2 \wedge c = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{1} \Leftrightarrow x = 2$$

38. Resposta:

A expressão equivalente a $\dfrac{13}{3-4i}$ segue:

$$\frac{13}{3-4i} = \frac{13(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{39+52i}{3^2 - (4i)^2} = \frac{39+52i}{9 - 4^2 \times i^2} = \frac{39+52i}{9 - 16 \times (-1)} = \frac{39+52i}{9+16} = \frac{39+52i}{25}$$

39. Resposta:

$$\int (4x^3 - 2x)dx = \int 4x^3 dx - \int 2x dx = 4\int x^3 dx - 2\int x dx = 4 \times \frac{x^4}{4} - 2 \times \frac{x^2}{2} + C$$

$$= x^4 - x^2 + C$$

$\int (ku)dx = k\int xdx$

$\int u^n u'\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

$\int (u \pm v)dx = \int udx + \int vdx$

$\int \frac{u'}{u}dx = \ln|u| + C$

$\int e^u u'\,dx = e^u + c$

$\int a^u u'\,dx = \frac{a^u}{\ln(a)} + C$

$\int \sin xdx = -\cos x + C$

$\int \cos xdx = \sin x + C$

Integração por parte

$\int uv'\,dx = uv - \int u'\,vdx$

Função Modular

Para responder o número 40 é preciso ter conhecimentos profundo de tipos de funções modulares

Tipos de funções modulares

1. Função modular do tipo $y = f(|x|)$

2. Função modular do tipo $y = |f(x)|$

3. Função modular do tipo $y = |f(|x|)|$

40.Resposta:

O gráfico que representa a função $y = \log_2|x|$ é da opção B.

FIM

Resolução de Exame de Matemática – 12ª. Classe

Ano: 2016/ 1ª Época

Conceitos Básicos

Operações sobre proposições lógicas

Na lógica matemática estdaa – se as seguintes operações sobre proposições:

1. Negação de uma proposição $(\sim)$
2. Conjuncão de proposições $(\wedge)$
3. Disjunção de proposições $(\vee)$
4. Implicação material $(\Rightarrow)$
5. Equivalência materail $(\Leftrightarrow)$

Expressão proposicional
Uma expressão diz – se proposicional ou condição à uma expressao quando substituida a sua variàvel transforma – se numa proposição.
Exemplo:
$p(x): x-7\geq 0$

Expressão algebrica
Uma expressão algebrica diz – se **irracional** quando a variável aparece sob forma de um radicando.
Repare qu a expressão do número 3, a variável aparece dentro do radical com índice 3, e a varável aparece também sob forma de denominador, visto que não existem um número real que pode anular o denominador, razão pelo qual todo número real define a expressão dada.

Equação
Já foi dito que uma equação é a comparação de duas expressões designatórias por meio de símbolo de igualdade.

Equação quadrática
Diz – se equacao quadratica a toda equacao que por meio de manipulacoes algebricas reduz – se a forma padrao
$ax^2+bx+c=0, a,b,c\in IR\wedge a\neq 0$
O conjunto solução desta equação geralmente é encontrado pela fórmula:
$x_1;x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}$, onde,

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

<u>Exame de Matemática – 12ª classe, Ano: 2016/ 1ª Época</u>

<u>Resoluções</u>

1. **Resposta:**
A tradução para a linguagem simbólica da proposição «*Maria não estudante e Joana não é professora*» segue,
Já foi considerado que:
p: Maria é estudante; então ~*p*: Maria não é estudante.
q: Joana é professora; então ~*q*: Joana não é professora.
A proposição «*Maria não é estudante e Joana não é professora*» simbolicamente fica: $\sim p\wedge\sim q \Leftrightarrow \sim(p\vee q)$.

2. **Resposta:**
A negação da expressão proposicional $x\geq 2$ é:
Seja $p(x): x\geq 2 \Rightarrow\sim p(x):\sim(x\geq 2)\Leftrightarrow\sim p(x): x<2.$

3. **Resposta:**
Expressão algébrica racional fraccionaria é uma expressão em que a variável aparece sub forma de denominador; logo nas 4 alternativas, a resposta certa é: $\dfrac{x-2}{x}$.

4. **Resposta:**
Determinado o domínio de existência da expressão $\dfrac{x-1}{x^2+1}$, teremos: seja $A(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$;
$D_A=\{x\in IR: x^2+1\neq 0\}$. $\Leftrightarrow x^2+1\neq 0\Leftrightarrow x^2\neq -1$; repare que qualquer número real, o seu quadrado é sempre diferente de -1; logo $D_A= IR$.

5. **Resposta:**
Vamos resolver a equação (quadrática), $2x^3-x^2-x=0\Leftrightarrow x(2x^2-x-1)=0,$ aplicando a lei de anulamento de produto, teremos: $x=0\vee 2x^2-x-1=0,$ o factor $2x^2-x-1$ é quadrático, produto $2x^2-x-1=0$, vamos resolver esse equação aplicando a fórmula resolvente:

$$\begin{aligned}&2x^2-x-1=0\Leftrightarrow a=2; b=-1; c=-1\\&\Delta=b^2-4.a.c\\&\Delta=(-1)^2-4.(+2).(-1)\\&\Delta=1+8\\&\Delta=9\end{aligned}$$

$$x_1;x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}\Leftrightarrow x_1;x_2=\frac{1\pm 3}{4}\Leftrightarrow x_1=\frac{1-3}{4}\vee x_2=\frac{1+3}{4}\Leftrightarrow x_1=-\frac{1}{2}\vee x_2=1$$

; a equação $2x^3-x^2-x=0$, tem como raízes: $\left\{-\dfrac{1}{2};0;1\right\}$

6. **Resposta:**

Resolvendo a equação $3^x + 3^{x+1} = 12$,em IR, teremos:

$$3^x + 3^{x+1} = 12 \Leftrightarrow 3^x + 3.3^x = 12 \Leftrightarrow 3^x(1+2) = 12 \Leftrightarrow 3^x.4 = 12 \Leftrightarrow 3^x = \frac{12}{4} \Leftrightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1.$$

7. Resposta:

Resolvendo a equação $\log_2(\log_3{}^{(x-1)}) = 1$, no seu domínio de existência, teremos:

Pela definição do logaritmo: $\log_a{}^b = x \Leftrightarrow ax = b$;

$$2^{-1} = \log_3^{(x-1)} \Leftrightarrow \log_3^{(x-1)} = 2 \Leftrightarrow 3^2 = (\log - 1) \Leftrightarrow x - 1 = 3^2 \Leftrightarrow x - 1 = 9 \Leftrightarrow x = 10.$$

8. Resposta:

$2sen(x) = 1$; para $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

$$2sen(x) = 1 \Leftrightarrow sen(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow sen(x) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

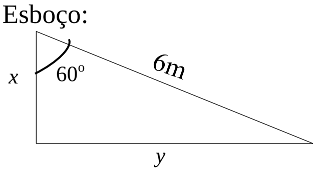
9. Resposta:

$\theta \in IIQ, \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, Portanto, $sen(\theta) > 0$ para $\theta \in IIQ, \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, e

$\cos(\theta) < 0$ $\theta \in IIQ, \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$. Sabe se que o produto entre dois factores com sinais contrario resulta um número menor que zero, logo no segundo quadrante é valida a afirmação $sen(\theta).\cos(\theta) < 0$

10. Resposta:

Esboço:



$$sen(60^o) = \frac{y}{6} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{6} \Leftrightarrow 6.\sqrt{3} = 2y \Leftrightarrow 2y = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow y = \frac{6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = 3\sqrt{3}$$

$$\cos(60^o) = \frac{x}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{6} \Leftrightarrow 6.1 = 2x \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{2} \Rightarrow x = 3$$

11. Resposta:

A distância entre os pontos da recta numérica cuja as abcissas são *x* e *3* escreve – se $d = |x-3|$

12. Resposta:

Para determinar o produto das raízes da equação $\left|\frac{x-3}{2}\right| = \frac{1}{3}$, temos que encontrar as raízes em primeiro lugar; assim,

$\Delta = b^2 - 4.a.c$

Equação exponêcial: é toda equação em que a incógnita aparece sob forma de um expoente de base *a*, sendo *a* positivo e diferente de unidade.

Determinantes de sistemas de equações líneares

A representação da forma

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ chama – se determinante proviniente de uma matriz de 3 por 3

Razões trigonométricas de alguns arcos

x	0	30	45	60	90
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tag	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0
ctg	ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	ND

Fórmula fundamental da trigonometria

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Outras relações trigonométricas

$$tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$ctg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Módulo ou valor absoluto de um número real

Chama – se módulo ou valor

absoluto de um número real x ao próprio nómero se este for não negativo ou ao seu simétrico se este for negativo.

$$|x| = \begin{cases} x, \text{se } x \geq 0 \\ -x, \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Equação modular: é toda equação que por meio de princípios de equivalência é redutível a forma:

$$|x| = a$$

A solução da equação acima segue:

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$$

Factorial de um número natural

O factorial de um número natural n é dado por:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$$

Exemplo:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$
$$5! = 120$$

Permutação

A permutacao de n elementos tomados p a p, é dado por:

$P_n = n!$ ou

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$$
$$n \equiv p$$

Exemplo:

$$p_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$
$$p_4 = 24$$

Aranjos Simples

Aranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!},\ n > p$$

Exemplo:

$$A_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} \Leftrightarrow A_2^4 = \frac{4!}{2!}$$
$$A_2^4 = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} \Leftrightarrow A_2^4 = 12$$

Combinação simples

Combinação simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \times p!},\ n > p$$

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

$$\left|\frac{x-3}{2}\right| = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x-3}{2} = \frac{1}{3} \vee \frac{x-3}{2} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3(x-3) = 2.1 \vee 3(x-3) = -2 \Leftrightarrow 3x-9 = 2 \vee$$

$$\Leftrightarrow 3x = 2+9 \vee 3x = -2+9 \Leftrightarrow 3x = 11 \vee 3x = 7 \Leftrightarrow x = \frac{11}{3} \vee x = \frac{7}{3} \Rightarrow P = \frac{11}{3} \times \frac{7}{3} = \frac{77}{9}$$

13. Resposta:

Aplicando os conhecimentos do binómio de Newton, o desenvolvimento de $(x+y)^{18}$ tem

18+1 Termos que são 19.

14. Resposta:

Simplificando a expressão dada teremos:

$$\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+1)!} \Leftrightarrow \frac{(n+2)(n+1)!+(n+1)!}{(n+1)!} \Leftrightarrow \frac{(n+1)![(n+1)+1]}{(n+1)!} = (n+1+1) = n+2$$

15. Resposta:

Este é um problema de arranjo simples sem repetição, repare que neste problema o número de elementos não é igual a número de posição por outro lado a ordem aqui é relevante, sendo assim teremos:

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!},\ n = 5 \wedge n = 3 \Rightarrow A_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

Os três produtos no frigorífico, podem ser guardados em 60 maneiras diferentes.

16. Resposta:

Podemos aplicar a fórmula de Simon Laplace para resolver este problema, sabe - se que

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)},\ n(A) = 3 \wedge n(S) = 10 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{10} = 0.3 = 30\%$$

A probabilidade de ser verde é de 30%

17. Resposta:

Diz – se Progressão aritmética (PA) à uma função real de variável natural (sucessão) em que a diferença entre o enê – simo primeiro termo e o enésimo termo é constante ($d = a_{n+1} - a_n$)

$$a_1 = 6,\ a_2 = 25,\ a_3 = 44, \ldots \Rightarrow a_3 - a_2 = a_2 - a_1 \Leftrightarrow 44 - 25 = 25 - 6 \Leftrightarrow 19 = 19$$

Logo a sucessão 6,25,44,… é uma progressão aritmética (PA)

18. Resposta:

Seja $a_n = q^n$; para que a sucessão dada seja infinitamente grande é necessário que

$$\lim(a_n) = \lim(q^n) = \infty; \Rightarrow |q| > 1$$

19. Resposta:

Dado o termo geral $b_n = \frac{3n}{n+1}$; $b_{11} = ? \Rightarrow b_{11} = \frac{3.11}{11+1} = \frac{33}{12}$, o termo de ordem 11 é igual a $\frac{33}{12}$

20. Resposta:

Comecemos $b_n = \frac{3n}{n+1}$; $b_{11=}\ ? \Rightarrow b_{11} = \frac{3.11}{11+1} = \frac{33}{12}$ por escrever os múltiplos de 2 com dois algarismos:

10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, …, 98

Fica claro que a sequência de números acima é uma P.A com primeiro termo igual a 10

Exemplo:

$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{4!}{2!\times 2!}$

$C_2^4 = \frac{4\times 3\times 2!}{2\times 1\times 2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{12}{2}$

$C_2^4 = 6$

Binómio de Newton

Binómio de Newton é uma expressão que envolve combinação simples, essa expressão é usada para desenvolver os polinómios que aparecem sob forma de binómios potenciais

$(x+y)^n = C_0^n x^n + ... + C_n^n y^n$

Definição clássica de Probabilidade

Se os acontecimentos elemntares forem equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimnto e o número de casos possíveis.

$P(A) = \frac{n(C.F)}{n(C.P)}$, $n(CF) \geq n(CP)$

Limite de uma sucessão

Sucessão convergente

Diz – se que uma sucessão (a_n) converge para um número real L (escreve – se $\lim a_n = L$)

Se, por muito pequeno que seja o número positivo δ se existir uma ordem ***p*** a apartir da qual se tem

$|a_n - L| < \delta$, isto é, $|a_n - L|$ torna tão pequena quando se queira.

Progressão aritmética (PA)

Uma sucessão (a_n) é uma progressão aritmética (P.A) se existe um número real r, tal que

$a_{n+1} - a_n = r, \forall n \in IN$

Ao número *r* chama – se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.A:

$a_n = a_1 + (n-1)\times r$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão aritmética é dada por:

e diferença igual a 2 unidades. Portanto $u_n = u_1 + (n-1)\times d \Rightarrow u_n = 10 + (n-1).2 \Leftrightarrow u_n = 2n+8$, Fazendo

$u_n = 98 \Rightarrow 2n+8 = 98 \Leftrightarrow 2n = 98-8 \Leftrightarrow 2n = 90 \Leftrightarrow n = \frac{90}{2} \Rightarrow n = 45$,

portanto são 45 múltiplo de 2 que podem ser escritos com dois algarismos.

21. Resposta:

i. No primeiro dia o empregado recebeu 200.00MT
ii. No segundo dia o empregado recebeu 400.00 MT
iii. No terceiro dia o empregado recebeu 800.00Mt, portanto,

$u_1 = 200,\ u_2 = 400,\ u_3 = 800, ..$

$\frac{u_3}{u_2} = \frac{u_2}{u_1} \Rightarrow \frac{800}{400} = \frac{400}{200} = 2 \Rightarrow q = 2$

Trata se de uma progressão geometrica, sendo assim teremos a soma de 10 termos de uma P.A,

$S_n = u_1\frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 200\frac{1-2^{10}}{1-2} \Leftrightarrow S_{10} = 200\frac{1-1024}{-1} \Leftrightarrow S_{10} = 200\frac{-1023}{-1} = 204600$

22. Resposta:

Uma função diz se ***par*** quando objectos simétricos do mesmo domínio correspondem a imagens simétricas do mesmo contradomínio. Geometricamente o gráfico de uma função *par* é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

23. Resposta:

Observando atentamente o gráfico da função, fica claro que o ponto de descontinuidade é de abcissa $x = 2$.

24. Resposta:

O gráfico intersecta no eixo das abcissas no ponto com abcissa $x = 2$, logo o conjunto solução da equação é $\{2\}$.

25. Resposta:

O contradomínio da função é dado por $D'_f =]-\infty;0] \cup \{3\}$

26. Resposta:

A função $f(x)$ é positiva se $x \in]2,+\infty[$ ou se $x > 2$

27. Resposta:

Calculando o valor de $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)$, teremos:

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right) = \frac{\infty^2+1}{\infty-1} = \frac{\infty\times\infty+1}{\infty-1} = \frac{\infty+1}{\infty} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, Este resultado não é um número real, chama se indeterminação. Normalmente quando se chega a este tipo de resultado levanta se a indeterminação rescrevendo o limite, assim:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right) = \frac{\infty+\frac{1}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}} = \frac{\infty+0}{1-0} = \frac{\infty}{1} = \infty$$

28. Resposta:

Vamos determinar o valor de $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2-1}{x^3+1}\right)$, assim,

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\times r}{2}\times n$$

Progressão geométrica (PG)

Uma sucessão (a_n) é uma progressãogeotmética (P.G) se existeum número real r, tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \forall n \in IN$$

Ao número *r* chama – se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.G:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão geométrica é dada por:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

Algumas operações com infinitos

$k\times\infty = \infty$

$\infty^k = \infty$

$\infty\times\infty = \infty$

$k+\infty = \infty$

$k-\infty = -\infty$

$\frac{\infty}{k} = \infty$

$\frac{k}{\infty} = 0$

Limite de uma função real de variável real

Dada uma função *f(x)* definida no domínio D_f, *a*, *L* são números reais. Diz – se, *L* é o limite da função *f(x)* quando *x* tende para *a* (*a* não necessariamente pertecente ao domínio de *f(x)*) sse:

$\forall\varepsilon>0;\exists\delta>0:0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$

e escreve – se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

Conheça alguns limites notáveis

- **Limites Neperianos**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^k$$

$\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{x^2-1}{x^3+1}\right) = \frac{(-1)^2-1}{(-1)^3+1} = \frac{1-1}{-1+1} = \left[\frac{0}{0}\right]$. Este resultado não é um numero real, chama se indeterminação. Normalmente quando se chega a este tipo de resultado levanta se a indeterminação rescrevendo o limite, assim:

$\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{x^2-1}{x^3+1}\right) = \lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}\right) = \lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)$ por concretização da variável x por numero -1 tem se: $\frac{-1-1}{(-1)^2-(-1)+1} = \frac{-2}{1+1+1} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$

29. Resposta:

Vamos determinar o valor de $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{sen(3x)}{3x^3+3x}\right)$, assim $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{sen(3x)}{3x^3+3x}\right) = \frac{sen(3.0)}{3.0^3+3.0} = \frac{sen(0)}{3.0+0} = \left[\frac{0}{0}\right]$, levantando a indeterminação teremos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(3x)}{3x^3+3x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(3x)}{3x(x^2+1)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(3x)}{3x}\right)\times\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = 1\times\frac{1}{0^2+1} = 1\times\frac{1}{1} = 1$$

30. Resposta:

Consideremos a função real de variável real definido por troços ou ramos:

$f(x) = \begin{cases} 2x-1, se\ x<k \\ x+3,\ se\ x\geq k \end{cases}$ Para que a função ***f(x)*** seja continua em conjunto de números reais é necessário que se cumpra a seguinte condição:

$\lim\limits_{x\to k^-} f(x) = \lim\limits_{x\to k^+} f(x) = \lim\limits_{x\to k} f(x) = f(k)$. Neste caso para, a condição $\lim\limits_{x\to k^-} f(x) = \lim\limits_{x\to k^+} f(x)$ equivale afirmar que existem o limite de *f(x)* no ponto de abcissa *x=k*, então podemos escrever

$$\lim_{x\to k^-} f(x) = \lim_{x\to k^+} f(x) \Rightarrow 2k-1 = k+3 \Leftrightarrow 2k-k = 3+1 \Rightarrow k = 4$$

31. Resposta:

A função não é derivável no ponto de onde ela não é definida, ou seja uma função real de variável real não é definida $f(x) = x+3 \Rightarrow f(k) = k+3$ no ponto onde não é possível traçar uma recta tangente, portanto no ponto $x=1$

32. Resposta:

A função admite primeira derivada em todo R, excepto no ponto de abcissa $x=1$, isto é em $x\in\left]-\infty,1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$, visto que traçando uma recta tangente em qualquer abcissa deste intervalo, a recta forma um ângulo com o sentido positivo de eixo das abcissas maior que 90°.

33. Resposta:

Dada a função $f(x) = \cos(2x-\pi)$, derivando - a teremos:

$f(x) = \cos(2x-\pi) \Rightarrow f'(x) = [\cos(2x-\pi)]' = (2x-\pi)'.(-sen(2x-\pi)) = -2sen(2x-\pi)$,

Logo: $f'(x) = -2sen(2x-\pi)$

34. Resposta:

Dada a função $f(x) = 2x^4+x^3-x$, vamos determinar a primeira derivada desta função:

$f'(x) = (2x^4+x^3-x)' \Leftrightarrow f'(x) = 2.4x^3+3x^2-1 \Leftrightarrow f'(x) = 8x^3+3x^2-1$, Vamos determinar a segunda derivada,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$$

- **Limites trigonométricass**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

Continuidade de funções reais de variáveis reais

Uma função real de variàvel real é contínua num ponto de abcissa $x=a$ sse,

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

Se existir a diferença entre os mmbros dessa igualdade, a função é descontinua no ponto de abcissa *a*

Cálculo diferencial

- **Definição da derivada de uma função**

Dada uma função *F(x)* definida no domínio D_F, sendo *a* abcissa de um ponto P, tal que $a\in D_F$. A derivada da função *F(x)* no ponto P é dada pela expressão:

$$F'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{a-h}$$ ou

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x-h}=f(x)$$

A função *f(x)* chama – se a primeira derivada.

Regras de derivação imediata

Função constante

$f(x)=k\Rightarrow\ f'(x)=0$

Função potência

$f(x)=x^n\Rightarrow\ f'(x)=nx^{n-1}$

Função polinomial

Função composta

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n\Rightarrow$

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

$$f''(x)=\left(8x^3+3x^2-1\right)\Leftrightarrow f''(x)=3.8x^2+2.3x-0$$

$$\Leftrightarrow f''(x)=24x^2+6x$$

35. Resposta:

Seja $f(x)=x^3-12x,\ f'(x)=\left(x^3-12x\right)\Leftrightarrow f'(x)=3x^2-12$, vamos anular a primeira (igualar a zero a primeira derivada) derivada, assim,

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-12=0\Leftrightarrow 3x^2=12\Leftrightarrow x^2=\frac{12}{3}\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{4}\Leftrightarrow x_1=$$

vamos determinar a imagem de -2 e 2 pela função *f(x)*, assim,

$$f(x)=x^3-12x,se\ x=-2\Rightarrow f(-2)=(-2)^3-12.(-2)=-8+24=16$$

$$f(x)=x^3-12x,\ se\ x=2\Rightarrow f(2)=2^3-12.2=8-24=16$$

Logo o extremo máximo da função é igual a 16 e extremo mínimo da função é igual a 16.

- **Somente para secção de Letras**

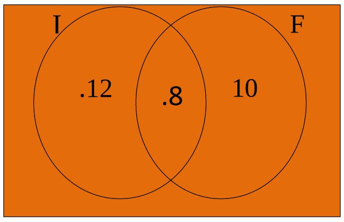
36. Resposta:

$$\frac{P(x)}{x^2+1}=2x-1\wedge R(x)=x+1,\ \Rightarrow P(x)=\left(x^2+1\right)\left(2x-1\right)+\left(x+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(x)=2x^3+2x-x^2-1+x+1\Leftrightarrow P(x)=2x^3-x^2+3x$$

37. Resposta:

Vamos construir um diagrama de Venn:



$n(I)=x-n(I\cap F)\Rightarrow 12=x-8\Leftrightarrow x=12+8\Rightarrow x=20$. São 20 turistas que falam, inglês.

38. Resposta:

Fazendo uma leitura rigorosa no gráfico podemos concluir que $\lim_{x\to -2^-}f(x)=0$

39. Resposta:

Seja $f(x)=x^2+3x$, vamos determinar o valor de $\lim_{x\to 3}\left(\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\right)$,

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\left(x^2+3x\right)-\left(3^2+3.3\right)}{x-3}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{\left(x^2+3x-18\right)}{x-3}\right)=\frac{3^2+3.3-18}{3-3}=\frac{18-18}{0}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Levantando a indeterminação teremos,

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2+3x-18}{x-3}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{(x-3)(x+6)}{x-3}\right)=\lim_{x\to 3}(x+6)=3+6=9$$

40. Resposta:

Vamos chamar desses números por *x* e *y*, então teremos:

$x+y=5\ \wedge P=xy\Rightarrow y=5-x\Rightarrow P(x)=x(5-x)\Leftrightarrow P(x)=-x^2+5x$,

no problema foi dito que o produto entre x e y é um máximo, então:

- **Somente Para Secção de Ciências**

36.Resposta:

$f'(x)=\left(a_0x^n\right)+\left(a_1x^{n-1}\right)+...+\left(a_n\right)'$

Derivada da soma
$f(x)=u\pm v\Rightarrow \quad f'(x)=u'\pm v'$

Função afim
$f(x)=ax+b\Rightarrow \quad f'(x)=a$

Função produto
$f(x)=u\times v\Rightarrow \quad f'(x)=u'v+uv'$

Função quociente
$f(x)=\frac{u}{v}\Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Função composta
$f(x)=u^n\Rightarrow \quad f'(x)=nu^{n-1}u'$

Derivada da função exponêncial

Função exponêncial de base *e*
$f(x)=e^u\Rightarrow \quad f'(x)=u'e^u$

Função exponêncial de base *a*
$f(x)=a^u\Rightarrow \quad f'(x)=u'a^u\ln(a)$

Derivada da função logarítmica
Função logarítmica de base *e*

$f(x)=\ln(u)\Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'}{u}$

Função logarítmica de base *a*
$f(x)=\log_a(a)\Rightarrow$

$f'(x)=\frac{u'}{u\ln(a)}$

Derivada da função trigonométrica
Função seno
$f(x)=sen(x)\Rightarrow \quad f'(x)=\cos(x)$
$f(x)=sen(u)\Rightarrow \quad f'(x)=u'\cos(u)$

Função co-seno
$f(x)=\cos(x)\Rightarrow \quad f'(x)=-sen(x)$

$f(x)=\cos(u)\Rightarrow \quad f'(x)=-u'sen(u)$

Intervalos de monotonia e primeira derivada de uma função

Teorema
Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivavel em]a, b[.

- Se $f'(x)>0$ para todo $x\in]a,b[$, então f é estritamente crescente

Seja $f(x)=\cos(kx),\ T=5\pi;\ k=?\ com\ \ k\in R^+$
A fórmula para determinar o período da função trigonométrica seno e co-seno é: $T=\frac{2\pi}{|k|}$,

$$T=\frac{2\pi}{|k|}\Rightarrow 5\pi=\frac{2\pi}{|k|}\Leftrightarrow 5=\frac{2}{|k|}\Leftrightarrow 5|k|=2\Leftrightarrow |k|=\frac{2}{5}\Leftrightarrow k=\frac{2}{5}\vee k=-\frac{2}{5},$$

Tendo em consideração que k é um número real positivo, então $k=\frac{2}{5}$

Os dois números procurados são: $\frac{5}{2}$ e $\frac{5}{2}$

- **<u>Somente Para Secção de Ciências</u>**

36. Resposta:

Seja $f(x)=\cos(kx),\ T=5\pi;\ k=?\ com\ \ k\in R^+$
A fórmula para determinar o período da função trigonométrica seno e co-seno é: $T=\frac{2\pi}{|k|}$,

$$T=\frac{2\pi}{|k|}\Rightarrow 5\pi=\frac{2\pi}{|k|}\Leftrightarrow 5=\frac{2}{|k|}\Leftrightarrow 5|k|=2\Leftrightarrow |k|=\frac{2}{5}\Leftrightarrow k=\frac{2}{5}\vee k=-\frac{2}{5},$$

Tendo em consideração que k é um número real positivo, então $k=\frac{2}{5}$

37. Resposta:
Dado que :
$P(-3;-1)\wedge Q(0;2)$

$$\left(x_M;y_M\right)=\left(\frac{0-(-3)}{2};\frac{2-(-1)}{2}\right)\Leftrightarrow\left(x_M;y_M\right)=\left(\frac{0+3}{2};\frac{2+1}{2}\right)\Rightarrow\left(x_M;y_M\right)=\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$$

38.Resposta:

Dada a função $f(x)=\frac{2}{x-3}$, a equação da assimptota vertical dessa função é $x=3$, o valor de abcissa que anula o denominador.

39. Resposta:

Vamos determinar a função inversa de $f(x)=2^x-1$, seja $f(x)=y$, isso implica que

$$y=2^x-1\Leftrightarrow 2^x-1=y\Leftrightarrow 2^x=y+1\Leftrightarrow x=\log_2^{(y+1)}\Leftrightarrow y^{-1}=\log_2(x+1)\Rightarrow f^{-1}(x)=\log_2(x+1)$$

em $[a, b]$

- Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é estritamente decrescente em $[a, b]$

Máximos e mínimos absolutos e primeira derivada de uma função

Teorema

Seja *f* uma função contínua em $[a, b]$ e tem um máximo ou um mínimo em ***c*** do intervalo $]a, b[$, então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Um elemento *c* do domínio de uma função *f* é um ponto crítico de *f* se então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Álgebra

Polinómios

É uma soma de monómios não semelhantes

Um polinómio de uma variável tem a seguinte fórmula geral:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

Onde

$$a_0,\ a_1, a_2, \ldots, a_n \in IR \wedge n \in IN$$

Regra de Ruffin

É uma regra que é usada para determinar o quociente entre o polinómio de grau *n* e um binómio línear *x* - *a*.

Teoria de Conjunto

Conjunto é uma colecção de objectos da mesma espécie.

Operações sobre conjuntos

Reunião de conjuntos

Intersecção de conjuntos

Diferença de conjuntos

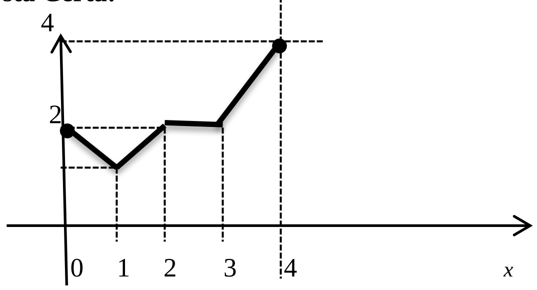
Complementar de conjuntos

Geometria analítica

Dado um ponto P(x_0, y_0) e recta r: $Ax + Bx + C = 0$ no plano, a distância entre o ponto P e a recta *r* representada por d(P, r) é dada por:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

40. Resposta Certa:



FIM

Função homográfica

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}, com\ cx+d\neq 0$$

Números complexos

Para responder o número 38 é preciso ter conhecimentos profundo de números complexos conjugados

Números complexos conjugados

Dois números complexos dizem – se conjugados quando tem partes reais iguais e partes imaginárias simétricas. O onjugado de número complexo z representa – se por $\overline{z}$

Exemplo:

$3+4i \wedge 3-4i$ são dois números complexos conjugados.

Prmitiva de uma função

As regras de primitivação de funções obtém – se através das regras de derivação, assim temos:

$$\int (k)dx = kx + c$$

$$\int (ku)dx = k\int xdx$$

$$\int u^n u'\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int (u \pm v)dx = \int udx + \int vdx$$

$$\int \frac{u'}{u}dx = \ln|u| + C$$

$$\int e^u u'\,dx = e^u + c$$

$$\int a^u u'\,dx = \frac{a^u}{\ln(a)} + C$$

$$\int \sin xdx = -\cos x + C$$

$$\int \cos xdx = \sin x + C$$

Integração por parte

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'vdx$$

Função Modular

Para responder o número 40 é preciso ter conhecimentos profundo de tipos de funções modulares

Tipos de funções modulares

Função modular do tipo $y = f(|x|)$

Função modular do tipo $y=\left|f\left(x\right)\right|$

Função modular do tipo $y=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$

Resolução de Exame de Matemática – 12ª. Classe
Ano: 2016/ 2ª Época

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

❖ **Conceitos básicos**

Operações sobre proposições lógicas

Na lógica matemática estdaa – se as seguintes operações sobre proposições:

Negação de uma proposição
Conjuncão de proposições
Disjunção de proposições
Implicação material
Equivalência materail

Expressão algebrica

Uma expressão algebrica diz – se irracional quando a variável aparece sob forma de um radicando.
Repare qu a expressão do número 3, a variável aparece dentro do radical com índice 3, e a varável aparece também sob forma de denominador, visto que não existem um número real que pode anular o denominador, razão pelo qual todo número real define a expressão dada.

Equação

Já foi dito que uma equação é a comparação de duas expressões designatórias por meio de símbolo de igualdade.

Equação exponêcial: é toda equação em que a incógnita aparece sob forma de um expoente de base *a*, sendo *a* positivo e diferente de unidade.

Determinantes de sistemas de equações lineares

A representação da forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ chama – se}$$

determinante proviniente de uma matriz de 3 por 3

Exame de Matemática – 12ª classe, Ano: 2016/ 2ª Época

Resoluções

1. Resposta:
Sendo p: "*Ana é estudante*" e q: "*Zé é professor*", a tradução simbólica de "*Ana é estudante ou Zé é professor*" é: $p \vee q$

2. Resposta:
A negação da proposição $\sim p \Rightarrow q$ segue:

$$\sim p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim\sim p \vee q \Leftrightarrow p \vee q;\ \sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

3. Resposta:
A expressão $\dfrac{5x\sqrt{3x}-2}{3}$ é algébrica irracional, porque a variável aparece sob forma de radicando.

4. Resposta:
Dada a expressão $\sqrt[3]{\dfrac{2}{x-3}}$ o seu domínio de existência segue:

$$DE = \{x \in IR : x-3 \neq 0\} \Rightarrow x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3 \Rightarrow DE = IR \setminus \{3\}$$

5. Resposta:
Vamos calcular as raízes reais da equação $-x^3-4x^2+5x=0$ e depois somar essas raízes:

$$-x^3-4x^2+5x=0 \Leftrightarrow x(-x^2-4x+5)=0 \Leftrightarrow -x(x^2+4x-5)=0 \Leftrightarrow -x(x+5)(x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow -x=0 \vee x+5=0 \vee x-1=0 \Leftrightarrow x_1=0 \vee x_2=-5 \vee x_3=1$$

$$x_1+x_2+x_3=0+(-5)+1=-4$$

6. Resposta:
O conjunto solução da equação $9^x+2\times3^x-3=0$ segue:

$$9^x+2\times3^x-3=0 \Leftrightarrow 3^{2x}+2\times3^x-3=0 \Leftrightarrow (3^x+3)(3^x-1)=0 \Leftrightarrow (3^x+3)=0 \vee 3^x-1=0$$

$$\Leftrightarrow 3^x=-3 \vee 3^x=1 \Rightarrow 3^x=3^0 \Leftrightarrow x=0$$

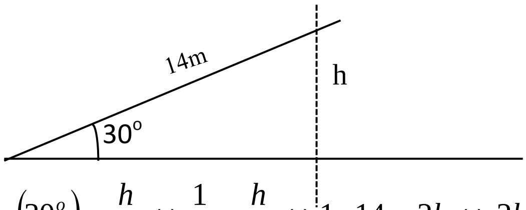
7. Resposta:
O valor de m na equação $\log_2(m)=\log_2(8)+\log_2(3)$ segue:
O valor de m deve ser positivo (condição de logaritmo), portanto,

$$\log_2(m)=\log_2(8)+\log_2(3) \Leftrightarrow \log_2(m)=\log_2(8\times3) \Leftrightarrow m=8\times3 \Rightarrow m=24$$

8. Resposta:
Se $\pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow sen(\theta).\cos(\theta)>0$, visto que

$$\pi<\theta<\frac{3\pi}{2} \Rightarrow sen(\theta)<0 \wedge \cos(\theta)<0$$

9. Resposta:
Esboço:



$$sen(30^o)=\frac{h}{14} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{h}{14} \Leftrightarrow 1\times14=2h \Leftrightarrow 2h=14 \Leftrightarrow h=\frac{14}{2} \Rightarrow h=7m$$

A altura atingida pelo avião é de 7m aproximadamente

Razões trigonométricas de alguns arcos

x	0	30	45	60	90
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tag	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0
ctg	ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	ND

Fórmula fundamental da trigonometria

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$$

Outras relações trigonométricas

$$tg(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$ctg(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Módulo ou valor absoluto de um número real

Chama – se módulo ou valor absoluto de um número real x ao próprio nómero se este for não negativo ou ao seu simétrico se este for negativo.

$$|x|=\begin{cases} x, \text{se } x\geq 0 \\ -x, \text{se } x<0 \end{cases}$$

Equação modular: é toda equação que por meio de princípios de equivalência é redutível a forma:

$$|x|=a$$

A solução da equação acima segue:

$$|x|=a \Leftrightarrow x=a \vee x=-a$$

Factorial de um número natural

O factorial de um número natural n é dado por:

$$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 1$$

Exemplo:

$$5!=5\times4\times3\times2\times1$$

$$5!=120$$

Permutação

A permutacao de n elementos tomados p a p, é dado por:

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

10. Resposta:

A designação correcta do conjunto das abcissas dos pontos cuja distância à origem excede 4 é:

$$|x-0|>4 \Leftrightarrow |x|>0$$

11. Resposta:

Vamos resolver a equação modular $|x+3|=7$ e depois achar o produto das suas raízes:

$$|x+3|=7 \Leftrightarrow (x+3)^2=7^2 \Leftrightarrow x^2+6x+9-49=0 \Leftrightarrow x^2+6x-40=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-4)(x+10)=0 \Rightarrow x_1=4 \vee x_2=-10$$

$$P=x_1\times x_2 \Leftrightarrow P=4\times(-10) \Leftrightarrow P=-40$$

12. Resposta:

O desenvolvimento de $(x+y)^{22}$ tem 22+1 termos que são 23 termos

13. Resposta:

Vamos simplificar a expressão $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$,

$$\frac{(n+1)!}{(n-2)!}=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}=(n+1)n(n-1)=n(n+1)(n-1)=n(n^2-1)=n^3-n)$$

14. Resposta:

Considere o conjunto: $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, pretende se formar números com três algarismos diferentes, aqui a ordem interessa, logo podemos resolver este problema usando fórmula de arranjos simples:

$$A_p^n=\frac{n!}{(n-p)!};\ n=9,\ p=3 \Rightarrow A_3^9=\frac{9!}{(9-3)!} \Leftrightarrow A_3^9=\frac{9\times8\times7\times6!}{6!} \Leftrightarrow A_3^9=9\times8\times$$

15. Resposta:

Vamos representar o espaço amostral, $S=\{1,2,3,4,5,6\}$, O evento é sair ou obter um número maior do que 3, assim, $A=\{4,5,6\}$, o espaço amostral é finito e enumerável pois os eventos elementares são mutuamente excludentes e equiprováveis, são obedecidas as condições de Laplace, então podemos explorar a sua fórmula para solucionar este problema:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)} \underset{n(A)=3\wedge n(S)=6}{\Rightarrow} P(A)=\frac{3}{6} \Leftrightarrow P(A)=\frac{1}{2}$$

16. Resposta:

Uma sucessão a_n diz se progressão aritmética (PA) se a diferença $a_{n+1}-a_n$ é constate essa diferença designa se por “d”. Portanto das sucessões dadas PA é 1, 2, 3,…

$$a_1=1;\ a_2=2;\ a_3=3,\ldots \Rightarrow a_3-a_2=a_2-a_1 \Leftrightarrow 3-2=2-1=1 \Rightarrow d=1$$

17. Resposta:

Das sucessões dadas, opção B apresenta uma sucessão infinitamente pequena, verifique:

$$1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\ldots \Rightarrow a_1=1;\ a_2=\frac{1}{2};\ a_3=\frac{1}{3};\ldots \Rightarrow a_n=\frac{1}{n} \therefore \lim\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

18. Resposta:

$$a_n=\frac{5n+1}{n+2} \Rightarrow a_7=\frac{5\times7+1}{7+2}=\frac{35+1}{9}=\frac{36}{9}=4$$

$P_n = n!$ ou

$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$

$n \equiv p$

Exemplo:

$p_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$p_4 = 24$

Aranjos Simples

Aranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!},\ n > p$$

Exemplo:

$$A_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} \Leftrightarrow A_2^4 = \frac{4!}{2!}$$

$$A_2^4 = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} \Leftrightarrow A_2^4 = 12$$

Combinação simples

Combinação simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \times p!},\ n > p$$

Exemplo:

$$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{4!}{2! \times 2!}$$

$$C_2^4 = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 1 \times 2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{12}{2}$$

$$C_2^4 = 6$$

Binómio de Newton

Binómio de Newton é uma expressão que envolve combinação simples, essa expressão é usada para desenvolver os polinómios que aparecem sob forma de binómios potenciais

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + \ldots + C_n^n y^n$$

Definição clássica de Probabilidade

Se os acontecimentos elemntares forem equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimnto e o número de casos possíveis.

19. Resposta:

Aqui pretendemos somar os *n* primeiros termos da seguinte sucessão:

$$1;3;5\ldots \Rightarrow a_1 = 1;\ a_2 = 3;\ a_3 = 5;\ldots \Rightarrow a_n = 2n-1$$

$$S_n = \frac{a_1 + an}{2} \times n \Rightarrow S_n = \frac{1+2n-1}{2} \times n \Leftrightarrow S_n = \frac{2n}{2} \times n \Leftrightarrow S_n = n^2$$

20. Resposta:

Dados do problema:

$$50;100;200;\ 400\ldots \Rightarrow a_1 = 50;\ a_2 = 100;\ a_3 = 200; a_4 = 400\ldots \Rightarrow \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{400}{200} = \frac{200}{100} = \frac{100}{50} = 2 \therefore q = 2$$

A sequência de produção é uma progressão geométrica (PG) com razão igual a 2 unidades.

A fórmula para determinar a soma de n termos de uma PG segue

$$S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} \underset{n=10 \wedge q=2}{\Rightarrow} S_{10} = 50 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} \Leftrightarrow S_{10} = 50 \times 1023 = 51.150$$

21. Resposta:

Uma função real de variável real é ***par*** quando objectos simétricos do mesmo domínio corresponderem a mesma imagem, assim: $\forall x \in D_f : f(+x) = -f(-x)$

A função $f(x) = \cos(x)$ obedece essa condição, logo ela é *par*.

22. Resposta:

Observando atentamente o gráfico, podemos concluir que a abcissa do ponto de descontinuidade é *x=1*

23. Resposta:

A partir do gráfico fica claro que o conjunto que tem elementos que são zeros da função é $\{1\}$ o gráfico intersecta em *x=1*.

24. Resposta:

O conjunto que representa o contradomínio da função é $]-\infty;1] \cup [2;+\infty[$

25. Resposta:

A função é negativa no intervalo $]-\infty;-1]$

26. Resposta:

O valor de $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-x^2}{x-1}$ seque com os seguintes cálculos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-x^2}{x-1} = \frac{2-\infty^2}{\infty-1} = \frac{2-\infty}{\infty} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Vamos levantar a indeterminação $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2-x^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} -x = -\infty$

27. Resposta:

O valor de $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{x-1}$ seque com os seguintes cálculos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{x-1} = \frac{1^2-5\times 1+4}{1-1} = \frac{1-5+4}{0} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Vamos levantar a indeterminação $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-5x+4}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-4)(x-1)}{x-1} =$

$$P(A)=\frac{n(C.F)}{n(C.P)},\ n(CF)\geq n(CP)$$

Limite de uma sucessão

Sucessão convergente

Diz – se que uma sucessão (a_n) converge para um número real L (escreve – se $\lim a_n = L$)

Se, por muito pequeno que seja o número positivo δ se existir uma ordem ***p*** a apartir da qual se tem

$|a_n - L| < \delta$, isto é, $|a_n - L|$ torna tão pequena quando se queira.

Progressão aritmética (PA)

Uma sucessão (a_n) é uma progressão aritmética (P.A) se existe um número real r, tal que

$$a_{n+1}-a_n = r, \forall n \in IN$$

Ao número *r* chama – se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.A:

$$a_n = a_1 + (n-1)\times r$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão aritmética é dada por:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\times r}{2}\times n$$

Progressão geomética (PG)

Uma sucessão (a_n) é uma progressãogeotmética (P.G) se existeum número real r, tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \forall n \in IN$$

Ao número *r* chama – se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.G:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão geomética é dada por:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

Algumas operações com infinitos

$k\times\infty=\infty$

$\infty^k=\infty$

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

$$=\lim_{x\to 1}(x-4)=1-4=-3$$

28. Resposta:

Calculando o valor de $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)\times sen(4x)}{x^2}$

$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)\times sen(4x)}{x^2}=\frac{sen(0)\times sen(4.0)}{0^2}=\frac{0\times sen(0)}{0}=\left[\frac{0}{0}\right]$ Indeterminação, vamos redefinir o limite,

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)sen(4x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\times\frac{sen(4x)}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{4sen(4x)}{4x}=1\times 4\lim_{x\to 0}\frac{sen(4x)}{4x}=1+4\times 1=1+4=5$$

29. Resposta:

Consideremos a função real de variável real que se segue:

$f(x)=\begin{cases}k+x, se\ x\leq 0\\ 2^{-x},\ se\ x>0\end{cases}$; o valor de k para que a função *f(x)* seja continua no ponto de abcissa x= 0 segue:

$\lim_{x\to -0^-} f(x)=\lim_{x\to -0^+} f(x)=\lim_{x\to -0} f(x)=f(0)$, Neste caso para $f(0)=k+0$, a condição $\lim_{x\to -0^-} f(x)=\lim_{x\to -0^+} f(x)$ equivale afirmar que existem o limite de *f(x)* no ponto de abcissa x= 0, então podemos escrever

$$\lim_{x\to -0^-} f(x)=\lim_{x\to -0^+} f(x)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(k+x)$$

$$\lim_{x\to 0^-}(k+x)=\lim_{x\to 0^+}\left(2^{-x}\right)=k+0=2^0 \Rightarrow k=1$$

30. Resposta:

Observando atentamente o gráfico a função *f(x)* não é derivável nos seguintes valores:{-4;0;4} porque não é possível traçar uma recta tangente nos pontos com essas abcissas

31. Resposta:

Observando atentamente o gráfico, a função *f(x)* tem derivada nula nos valores $\{-2;2\}$ visto que traçando rectas tangentes nos pontos com essas abcissas , as rectas são paralelas ao eixo das abcissas.

32. Resposta:

A primeira derivada da função $f(x)=e^{\ln(x)}$ segue:

$$f(x)=e^{\ln(x)}\Rightarrow f'(x)=\left(e^{\ln x}\right)'\Leftrightarrow f'(x)=(\ln x)'e^{\ln x}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{x}e^{\ln x}=\frac{e^{\ln x}}{x}=e^{\ln x}.x^{-1}$$

33. Resposta:

A primeira derivada da função $f(x)=4x^2+2x+2$ segue:

$$f'(x)=\left(4x^2+2x+2\right)'\Leftrightarrow f'(x)=\left(4x^2\right)'+(2x)'+2'\Leftrightarrow f'(x)=2\times 8x+2+0\Leftrightarrow f'(x)=2x+2$$

$$f''(x)=(8x=2)'\Leftrightarrow f''(x)=(8x)'+2'\Leftrightarrow f''(x)=8+0\Leftrightarrow f''(x)=2$$

34. Resposta:

A ordenada máxima do extremo da função $f(x)=-x^2+1$ segue:

$$f(x)=-x^2+1\Leftrightarrow f'(x)=\left(-x^2+1\right)'\Leftrightarrow f'(x)=\left(-x^2\right)'+1'\Leftrightarrow f'(x)=-2x$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow -2x=0\Leftrightarrow x=\frac{0}{-2}\Leftrightarrow x=0\Rightarrow f(0)=-0^2+1\Leftrightarrow f(0)=1$$

, A ordenada, do extremo máximo do gráfico da função *f(x)* é 1.

$\infty \times \infty = \infty$

$k + \infty = \infty$

$k - \infty = -\infty$

$\frac{\infty}{k} = \infty$

$\frac{k}{\infty} = 0$

Limite de uma função real de variável real

Dada uma função *f(x)* definida no domínio D_f, *a*, *L* são números reais. Diz – se, *L* é o limite da função *f(x)* quando *x* tende para *a* (*a* não necessariamente pertecente ao domínio de *f(x)*) sse:

$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

e escreve – se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Conheça alguns limites notáveis

- **Limites Neperianos**

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^k$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

- **Limites trigonométricass**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Continuidade de funções reais de variáveis reais

Uma função real de variàvel real é contínua num ponto de abcissa $x = a$ sse,

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Se existir a diferença entre os mmbros dessa igualdade, a função é descontinua no ponto de abcissa *a*

- **<u>Somente para a Secção de Letras</u>**

36. Resposta:

$$\frac{P(x)}{x^2+1} = 2x - 1 \wedge R(x) = x + 1$$

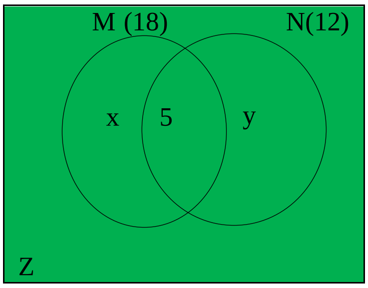
Isso significa que :

$$P(x) = (x^2+1)(2x-1) + x + 1$$

$$\Leftrightarrow P(x) = (2x^3 - x^2 + 2x - 1) + x + 1$$

$$\Leftrightarrow P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x$$

37. Resposta ao problema:



$$n(U) = 30$$

$n(\overline{M \cup N}) = z\,?$

$\Rightarrow n(\overline{M \cup V}) + n(M) + n(N) + n(M \cap N) = n(U)$

$z + x + y + 5 = 30 \Leftrightarrow z + (18-5) + (12-5) + 5 = 30$

$\Leftrightarrow z + 13 + 7 + 5 = 30 \Rightarrow z = 30 - 25 \Rightarrow z = 5$

São 5 pessoas que não tomaram nenhum refrigerante.

38. Resposta:

O valor de $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$

39. Resposta:

Vamos chamar desses números por x e y, então teremos:

$x - y = 4 \;\wedge P = xy \Rightarrow y = x - 4 \Rightarrow P(x) = x(4-x) \Leftrightarrow P(x) = -x^2 + 4x$, no problema foi dito que o produto entre *x* e *y* é um mínimo, então:

$$P'(x) = \left(-x^2 + 4x\right)' = -2x + 4 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = \frac{-4}{-2} \Rightarrow x = 2$$

$$x - y = 4 \Rightarrow 2 - y = 4 \Leftrightarrow -y = 4 - 2 \Leftrightarrow -y = 2 \Rightarrow y = -2$$

Os dois números procurados são: -2 e 2

40. Resposta:

Seja $f(x) = x^2 - 2x$, vamos determinar o valor de $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x-2}\right)$,

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{(x^2 - 2x) - (2^2 - 2.2)}{x-2}\right) = \lim_{x \to 2} \left(\frac{(x^2 - 2x)}{x-2}\right) = \frac{2^2 - 2 \times 2}{2-2} = \frac{4-4}{0} = \left[\frac{0}{0}\right.$$

Levantando a indeterminação teremos,

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x-2}\right) = \lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 - 2x}{x-2}\right) = \lim_{x \to 2} \left(\frac{x(x-2)}{x-2}\right) = \lim_{x \to 2} (x) = 2$$

- **<u>Somente para a secação de Ciências</u>**

36.Resposta:

Seja $m(x) = sen\left(\frac{x}{2}\right)$, o seu período determina se pela formula: $T = \frac{2\pi}{|k|}$, se $k = \frac{1}{2}$

Cálculo diferencial

- **Definição da derivada de uma função**

Dada uma função *F(x)* definida no domínio D_F, sendo *a* abcissa de um ponto P, tal que $a \in D_F$. A derivada da função *F(x)* no ponto P é dada pela expressão:

$$F'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{a-h} \quad \text{ou}$$

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x-h} \quad = f(x)$$

A função *f(x)* chama – se a primeira derivada.

Regras de derivação imediata

Função constante
$f(x) = k \Rightarrow \quad f'(x) = 0$
Função potência
$f(x) = x^n \;\Rightarrow\; f'(x) = nx^{n-1}$
Função polinomial
Função composta
$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n \Rightarrow$
$f'(x) = (a_0x^n)' + (a_1x^{n-1})' + ... + (a_n)'$

Derivada da soma
$f(x) = u \pm v \Rightarrow \quad f'(x) = u' \pm v'$
Função afim
$f(x) = ax + b \Rightarrow \quad f'(x) = a$
Função produto
$f(x) = u \times v \Rightarrow \quad f'(x) = u'v + uv'$
Função quociente
$f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Função composta
$f(x) = u^n \;\Rightarrow\; f'(x) = nu^{n-1}u'$

Derivada da função exponêncial

Função exponêncial de base *e*
$f(x) = e^u \;\Rightarrow\; f'(x) = u'e^u$

Função exponêncial de base *a*
$f(x) = a^u \;\Rightarrow\; f'(x) = u'a^u \ln(a)$

Derivada da função logarítmica
Função logarítmica de base *e*

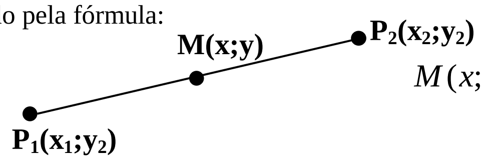
Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

então teremos:

$$T = \frac{2\pi}{|k|} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi \times 2 = 4\pi$$

37. Resposta:

Dado que *P(2;7) e Q(8;5)* , pretende se determinar o ponto médio do segmento da recta com extremos P e Q. De uma forma geral, as coordenadas de um ponto médio de um segmento é dado pela fórmula:



$$M(x;y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Consideremos os seguintes pontos extremos de um segmento do plano:

$P(2;7) \wedge Q(8;5)$

$$(x_M; y_M) = \left(\frac{8+2}{2}; \frac{5+7}{2}\right) \Leftrightarrow (x_M; y_M) = \left(\frac{10}{2}; \frac{12}{2}\right) \Rightarrow (x_M; y_M) = (5;6)$$

38. Resposta:

A equação da assimptota horizontal da função $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$ é x=0, visto que o grau do polinómio numerador é menor do que o grau do polinómio denominador.

39. Resposta:

Considerando a função $h(x) = 4x + 2$ pretendemos determinar a função *(hoh)(x)*

$$(hoh)(x) \Rightarrow (hoh)(x) = 4h(x) + 2 \Leftrightarrow (hoh)(x) = 4(4x+2) + 2 \Leftrightarrow (hoh)(x) = 16x + 8 + 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (hoh)(x) = 16x + 10$$

40.Resposta:

Vamos considerar a função *f(x)*, de $D_f = [-5,5]$

Dada a função f(x), com $x \in D_f$

O gráfico da função $y = A + f(x+a)$ é obtida a partir de *f*, através de transformação linear de *a unidade para direita se a por positivo (a unidade para esquerda se a for negativo) em relação ao eixo das abcissas xx' e A unidades para cima se A for positivo (para baixo se A for negativo) em relação ao eixo das ordenadas yy'*.

Se ***f*** tem domínio (campo) $D_f = [-5,5] \Rightarrow g(x) = 1 + f(x+1)$ a função *g(x)* terá o seguinte domínio, $D_g = [-5+1, 5+1] \Rightarrow D_g = [-4;6]$ e o contradomínio vai sofrer uma transladação de uma unidade para cima, logo o gráfico certo é da opção B.

FIM

$f(x)=\ln(u)\Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{u'}{u}$

Função logarítmica de base *a*

$f(x)=\log_a(a)\Rightarrow$

$f'(x)=\dfrac{u'}{u\ln(a)}$

Derivada da função trigonométrica
Função seno

$f(x)=sen(x)\Rightarrow \quad f'(x)=\cos(x)$

$f(x)=sen(u)\Rightarrow \quad f'(x)=u'\cos(u)$

Função co-seno

$f(x)=\cos(x)\Rightarrow \quad f'(x)=-sen(x)$

$f(x)=\cos(u)\Rightarrow \quad f'(x)=-u'sen(u)$

Intervalos de monotonia e primeira derivada de uma função

Teorema

Seja *f* uma função contínua em $[a,b]$ e derivavel em]a, b[.

- Se $f'(x)>0$ para todo $x\in]a,b[$, então f é estritamente crescente em $[a,b]$
- Se $f'(x)<0$ para todo $x\in]a,b[$, então f é estritamente decrescente em $[a,b]$

Máximos e mínimos absolutos e primeira derivada de uma função

Teorema

Seja *f* uma função contínua em $[a,b]$ e tem um máximo ou um mínimo em *c* do intervalo $]a,b[$, então $f'(c)=0$ ou $f'(c)$ não existe.

Um elemento *c* do domínio de uma função *f* é um ponto crítico de *f* se então $f'(c)=0$ ou $f'(c)$ não existe.

Álgebra
Polinómios

É uma soma de monómios não semelhantes

Um polinómio de uma variável tem a seguinte fórmula geral:

$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$

Onde

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in IR \wedge n \in IN$

Regra de Ruffin

É uma regra que é usada para determinar o quociente entre o polinómio de grau *n* e um binómio línear *x* - *a*.

Teoria de Conjunto

Conjunto é uma colecção de objectos da mesma espécie.

Operações sobre conjutos

Reunião de conjuntos
Intersecção de conjuntos
Diferença de conjuntos
Complementar de conjuntos

Geometria analítica

Dado um ponto P(x_0, y_0) e recta r: $Ax + Bx + C = 0$ no plano, a distância entre o ponto P e a recta *r* representada por d(P, r) é dada por:

$$d(P,r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Função homográfica

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, com\ cx + d \neq 0$$

Números complexos

Para responder o número 38 é preciso ter conhecimentos profundo de números complexos conjugados

Números complexos conjugados

Dois números complexos dizem – se conjugados quando tem partes reais iguais e partes imaginárias simétricas. O onjugado de número complexo z representa – se por $\bar{z}$

Exemplo:

$3+4i \wedge 3-4i$ são dois números complexos conjugados.

Prmitiva de uma função

As regras de primitivação de funções obtém – se através das regras de derivação, assim temos:

$$\int (k)dx = kx + c$$

$$\int (ku)dx = k\int xdx$$

$$\int u^n u'\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int (u \pm v)dx = \int udx + \int vdx$$

$$\int \frac{u'}{u}dx = \ln|u| + C$$

$$\int e^u u'\,dx = e^u + c$$

$$\int a^u u'\,dx = \frac{a^u}{\ln(a)} + C$$

$$\int \sin xdx = -\cos x + C$$

$$\int \cos xdx = \sin x + C$$

Integração por parte

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'\,vdx$$

Função Modular

Para responder o número 40 é preciso ter conhecimentos profundo de tipos de funções modulares

Tipos de funções modulares

Função modular do tipo $y = f(|x|)$

Função modular do tipo $y = |f(x)|$

Função modular do tipo $y = |f(|x|)|$

Resolução de Exame de Matemática – 12ª. Classe

Ano: 2017/ 1ª Época

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

❖ Conceitos básicos

Operações sobre proposições lógicas

Na lógica matemática estdaa – se as seguintes operações sobre proposições:

Negação de uma proposição
Conjuncão de proposições
Disjunção de proposições
Implicação material
Equivalência materail

Expressão algebrica

Uma expressão algebrica diz – se irracional quando a variável aparece sob forma de um radicando.

Repare qu a expressão do número 3, a variável aparece dentro do radical com índice 3, e a varável aparece também sob forma de denominador, visto que não existem um número real que pode anular o denominador, razão pelo qual todo número real define a expressão dada.

Equação

Já foi dito que uma equação é a comparação de duas expressões designatórias por meio de símbolo de igualdade.

Equação exponêcial: é toda equação em que a incógnita aparece sob forma de um expoente de base *a*, sendo *a* positivo e diferente de unidade.

Determinantes de sistemas de equações lineares

A representação da forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ chama – se

determinante proviniente de uma matriz de 3 por 3

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

Exame de Matemática – 12ª classe, Ano: 2017/ 1ª Época

Resoluções

1. Resposta:

De acordo com as primeiras leis de De Morgan: A proposição equivalente a $\sim(p \vee q)$ é a proposição $\sim p \wedge \sim q$

2. Resposta:

Sendo p: *O sol brilha* e q: *Não chove*, a tradução simbólica de "*Se o sol brilha então não chove*" é: $p \Rightarrow q$

3. Resposta:

A expressão $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \sqrt[3]{1-x}$ é algébrica irracional, o seu domínio é:

$$D = \{x \in R : 1-x \geq 0 \wedge x^2-1>0\} \Rightarrow x^2-1>0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1>0 \wedge x+1>0 \vee x-1<0 \wedge x+1<0 \Leftrightarrow \wedge x>1 \wedge x>-1 \vee x<1 \wedge x<-1$$

$$D = R \setminus \{-1;1\}$$

4. Resposta:

Resolvendo a equação $5^x + 5^{x+1} = 30$, teremos:

$$5^x + 5^{x+1} = 30 \Leftrightarrow 5^x + 5^x.5 = 30 \Leftrightarrow (1+5).5^x = 6.5 \Leftrightarrow 6.5^x = 6.5 \Leftrightarrow 5^x = \frac{6.5}{6} \Leftrightarrow$$

$$5^x = 5 \Leftrightarrow 5^x = 5^1 \Leftrightarrow x = 1$$

5. Resposta:

A equação $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ é biquadrática, vamos resolve – la e depois somar as suas raízes:

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2.x^2 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2-4)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \vee x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \vee x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \vee x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = \pm 2 \vee x \pm 1$$

$$\{-2,-1,1,2\} \Rightarrow S = -2 + (-1) + 1 + 2 = -3 + 3 = 0$$

6. Resposta:

A equação $2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ é cubica, vamos resolve – la e depois multiplicar as suas raízes entre si:

Vamos procurar uma das suas raízes por método tentativa, por exemplo o número 1, anula o membro a esquerda logo é uma das raízes ($2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow 2.1^3 - 1^2 - 2.1 + 1 = 0$), isso significa que o polinómio $2x^3 - x^2 - 2x + 1$ é divisível por $x-1$, vamos explorar a regra de Briot - Ruffin :

	2	-1	-2	1
1				
	2	1	-1	0

O resultado da divisão entre $2x^3 - x^2 - 2x + 1$ por $x-1$ é $2x^2 + x - 1$, a equação dada pode ser escrita da seguinte forma: $(2x^2 + x - 1)(x-1) = 0$ vamos resolver essa equação aplicando a lei de anulamento de produto, assim:

Razões trigonométricas de alguns arcos

x	0	30	45	60	90
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tag	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0
ctg	ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	ND

Fórmula fundamental da trigonometria

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$$

Outras relações trigonométricas

$$tg(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$ctg(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Módulo ou valor absoluto de um número real

Chama – se módulo ou valor absoluto de um número real x ao próprio nómero se este for não negativo ou ao seu simétrico se este for negativo.

$$|x|=\begin{cases} x, se\, x\geq 0 \\ -x, se\, x<0 \end{cases}$$

Equação modular: é toda equação que por meio de princípios de equivalência é redutível a forma:

$$|x|=a$$

A solução da equação acima segue:

$$|x|=a \Leftrightarrow x=a \vee x=-a$$

Factorial de um número natural

O factorial de um número natural n é dado por:

$$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 1$$

Exemplo:

$$5!=5\times 4\times 3\times 2\times 1$$

$$5!=120$$

Permutação

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

$$(2x^2+x-1)(x-1)=0 \Leftrightarrow (2x^2+x-1)=0 \vee x-1=0 \Leftrightarrow (2x-1)(x+1)(x-1)=0 \Rightarrow$$

$$\vee\, x+1=0 \vee x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \vee x=-1 \vee x=1 \Rightarrow x_1=\frac{1}{2} \vee x_2=-1 \vee x_3=1 \Rightarrow P=$$

$$P=\frac{1}{2}\times(-1)\times 1=-\frac{1}{2}$$

7. Resposta:

Vamos resolver a inequação $\frac{4x-12}{x-5}<0$ por auxílio de uma tabela de variação de sinal.

Seja $4x-12=0 \wedge x-5=0 \Leftrightarrow x=3 \wedge x=5$

x	$]-\infty;3[$	3	$]3;5[$	5	$]5;+\infty[$
$4x-12$	—	0	+	8	+
$x-5$	—	-2	—	0	+
$\frac{4x-12}{x-5}$	+	0	—	ND	+

A fracção $\frac{4x-12}{x-5}$ é menor que zero se e somente se $x\in\,]3;5[$,

logo $\frac{4x-12}{x-5}<0$ se $x\in\,]3;5[$

8. Resposta:

Vamos calcular o valor de seguinte determinante: $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}$,

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=(1\times1\times1+1\times0\times1+1\times1\times1)-(1\times1\times0+1\times0\times0+1\times1\times1)$$

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=(1+0+1)-(0+0+1))=2-1=1$$

9. Resposta:

Resolvendo a equação $2sen\left(\frac{x}{3}\right)=1,\ 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$

$$2sen\left(\frac{x}{3}\right)=1 \Leftrightarrow sen\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow sen\left(\frac{x}{3}\right)=sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{3}=\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{6} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

10. Resposta:

O valor numérico da expressão $sen(240^o)+2tg(315^o)$, segue:

$$sen(240^o)+2tg(315^o)=-sen(240^o-180^o)+2(-tg(360^o-315^o))$$

A permutacao de n elementos tomados p a p, é dado por:

$P_n = n!$ ou

$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$

$n \equiv p$

Exemplo:

$p_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$p_4 = 24$

Aranjos Simples

Aranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!},\ n > p$$

Exemplo:

$$A_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} \Leftrightarrow A_2^4 = \frac{4!}{2!}$$

$$A_2^4 = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} \Leftrightarrow A_2^4 = 12$$

Combinação simples

Combinação simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \times p!},\ n > p$$

Exemplo:

$$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{4!}{2! \times 2!}$$

$$C_2^4 = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2 \times 1 \times 2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{12}{2}$$

$C_2^4 = 6$

Binómio de Newton

Binómio de Newton é uma expressão que envolve combinação simples, essa expressão é usada para desenvolver os polinómios que aparecem sob forma de binómios potenciais

$(x+y)^n = C_0^n x^n + \ldots + C_n^n y^n$

Definição clássica de Probabilidade

Se os acontecimentos elemntares forem equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimnto e o número de casos possíveis.

$$= -sen(60^o) + 2(-tg(45^o)) = -sen(60^o) - 2tg(45^o) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{2} =$$

$$= \frac{-4-\sqrt{3}}{2}$$

11. Resposta:

A designação correcta de conjunto das abcissas dos pontos cuja distância a -2 é inferior a $\frac{3}{2}$ é

$$|x-(-2)| < \frac{3}{2} \Leftrightarrow |x+2| < \frac{3}{2}$$

12. Resposta:

Vamos resolver a equação modular: $|x-1| = -4$,

Pela definição do módulo de um número real, a equação $|x-1| = -4$ é impossível em R.

13. Resposta:

Simplificando a expressão $\frac{p_{n+1}+n!}{p_n}$, teremos:

$$\frac{p_{n+1}+n!}{p_n} = \frac{(n+1)!+n!}{n!} = \frac{(n+1)\times n!+n!}{n!} = \frac{n!\times((n+1)+1)}{n!} = n+1+1 = n+2$$

14. Resposta:

Vamos desenvolver a expressão $(x+k)^8$, assim:

$$(x+k)^8 = C_0^8 x^8 k^0 + C_1^8 x^7 k^1 + C_2^8 x^6 k^2 + C_3^8 x^5 k^3 + C_4^8 x^4 k^4 + C_5^8 x^3 k^5 + C_6^8 x^2 k^6 +$$

Repare que o sexto termo é $C_5^8 x^3 k^5$

15. Resposta:

O número total de comissões formado por homens e mulheres, sendo cada comissão tem 2 elementos é dado por C_2^5 e o número total de comissões formado por apenas mulheres é dado por C_2^3, foi dito no problema que em cada comissão deve ter pelo menos um homem, isto significa as comissões deve ter um homem ou dois, neste caso temos que retirar a possibilidade de ter comissões fórmada por duas mulheres, assim:

$$n(CP) = C_2^5 - C_2^3 \Leftrightarrow nCP = \frac{5!}{(5-2)!.2!} - \frac{3!}{(3-2)!.2!} = \frac{5\times4\times3!}{3!\times2!} - \frac{3\times2!}{1!\times2!} = 10-3 = 7,$$

o número de comissões possíveis a criar são 7.

16. Resposta:

Vamos representar o espaço amostral deste fenómeno aleatório:

$\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}$, o evento cair com faces diferentes tem seguinte elementos: $A = \{CK, KC \Rightarrow n(\Omega) = 4 \wedge n(A) = 2\}$, os eventos elementares do espaço amostral Ω são equiprováveis e mutuamente excludentes dois a dois pois é um espaço amostral enumerável e finito, portanto podemos aplicar a definição de Laplace para resolver este problema, assim:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$P(A)=\frac{n(C.F)}{n(C.P)},\ n(CF)\geq n(CP)$$

Limite de uma sucessão
Sucessão convergente

Diz – se que uma sucessão (a_n) converge para um número real L (escreve – se $\lim a_n = L$)

Se, por muito pequeno que seja o número positivo δ se existir uma ordem ***p*** a apartir da qual se tem

$|a_n - L| < \delta$, isto é, $|a_n - L|$ torna tão pequena quando se queira.

Progressão aritmética (PA)

Uma sucessão (a_n) é uma progressão aritmética (P.A) se existe um número real r, tal que

$$a_{n+1}-a_n = r, \forall n \in IN$$

Ao número *r* chama – se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.A:

$$a_n = a_1 + (n-1)\times r$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão aritmética é dada por:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\times r}{2}\times n$$

Progressão geomética (PG)

Uma sucessão (a_n) é uma progressãogeotmética (P.G) se existeum número real r, tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \forall n \in IN$$

Ao número *r* chama – se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.G:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão geomética é dada por:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

Algumas operações com infinitos

$k\times\infty=\infty$

$\infty^k=\infty$

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

17. Resposta:

Vamos determinar o termo geral da sucessão 10; 7; 4; 1; -2;…

Seja: $a_1 = 10;\ a_2 = 7;\ a_3 = 4;\ a_4 = 1;\ a_5 = -2;\ldots$

$$a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 \Rightarrow -2-1 = 1-4 = 4-7 = 7-10 = -3$$

A diferença entre $a_{n+1} \wedge a_n$ é constante, logo trata se de uma progressão aritmética (P.A)

$$d = a_{n+1} - a_n = -3 \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow$$

$$a_n = 10 + (n-1)\times(-3) \Leftrightarrow a_n = 10 - 3n + 3 \Leftrightarrow a_n = 13 - 3n$$

18. Resposta:

Considerando a sucessão de termo geral $u_n = 3n + 7$

A ordem do termo 52 segue:

$$u_n = 3n+7, n = ? \Rightarrow u_n = 52 \Leftrightarrow 52 = 3n + 7 \Leftrightarrow$$

$$3n + 7 = 52 \Leftrightarrow 3n = 52 - 7 \Leftrightarrow 3n = 45 \Leftrightarrow n = \frac{45}{3}$$

$$\Rightarrow n = 15$$

19. Resposta:

Considerando a sucessão $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

$$a_n = \frac{n}{n+1} \Rightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{(n+1)+1} - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)(n+1) - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} =$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{n^2 + n + 2n + 2} = \frac{4n+1}{n^2+3n+2} \Rightarrow \frac{4n+1}{n^2+3n+2} > 0, \forall n \in IN.$$

Logo a sucessão é monótona crescente.

20. Resposta:

Dados:

$a_1 = 7 \wedge a_5 = -9$ e a sucessão tem 5 termos, $a_1, a_2; a_3; a_4 \wedge a_5$ pois é uma PA

Podemos fazer o seguinte $a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 \Leftrightarrow$

$$-9 - (a_1 + (4-1)d) = a_1 + (2-1)d - 7 \Leftrightarrow -9 - (7+3d) = 7 + d - 7 \Leftrightarrow -16 - 3d =$$

$$-3d - d = 16 \Leftrightarrow -4d = 16 \Leftrightarrow d = -\frac{16}{4} \Rightarrow d = -4$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 7 + (n-1)(-4) \Leftrightarrow a_n = 7 - 4n + 4 \Leftrightarrow a_n = 11 - 4n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\times n \Rightarrow S_5 = \frac{7+(-9)}{2}\times 5 = \frac{7-9}{2}\times 5 = -1\times 5 = -5$$

Aqui, o leitor não precisa sofrer por seguir todos estes passos basta apenas aplicar a fórmula da soma de n termos de uma PA

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\times n \Rightarrow S_n = \frac{7 + a_5}{2}\times 5 \Leftrightarrow S_5 = \frac{7+(-9)}{2}\times 5 = \frac{7-9}{2}\times 5 = -1\times 5 = -5$$

21. Resposta:

Dada a sucessão de termo geral $a_n = 2^{n-2}$, precisa se encontrar a soma dos 5 primeiros termos:

$$a_n = 2^{n-2} \Leftrightarrow a_n = 2^{n-1-1} \Leftrightarrow a_n = \frac{2^{n-1}}{2} \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{2}\times 2^{n-1},$$ Entende se que

$\infty \times \infty = \infty$

$k + \infty = \infty$

$k - \infty = -\infty$

$\frac{\infty}{k} = \infty$

$\frac{k}{\infty} = 0$

Limite de uma função real de variável real

Dada uma função *f(x)* definida no domínio D_f, *a*, *L* são números reais. Diz – se, *L* é o limite da função *f(x)* quando *x* tende para *a* (*a* não necessariamente pertecente ao domínio de *f(x)*) sse:

$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

e escreve – se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

Conheça alguns limites notáveis

- **Limites Neperianos**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^k$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^p} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$$

- **Limites trigonométricass**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Continuidade de funções reais de variáveis reais

Uma função real de variàvel real é contínua num ponto de abcissa $x = a$ sse,

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Se existir a diferença entre os mmbros dessa igualdade, a função é descontinua no ponto de abcissa *a*

$$q = \frac{1}{2} \wedge a_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_5 = \frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{1-\frac{1}{32}}{\frac{2-1}{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{\frac{32-1}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{32-1}{32}\times\frac{2}{1} = \frac{31}{32}$$

22. Resposta:

Observando atentamente os dois gráficos pode se concluir que $f(x) \le g(x)$, se $x \in [-1;2]$

23. Resposta:

O domínio de $g(x) = tg(x)$ é $D_g = IR \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k\right\}, k \in Z$

24. Resposta:

A figura representa uma função injectiva, visto que, traçando varias rectas paralelas, elas intersectarão apenas um ponto do gráfico.

25. Resposta:

A afirmação verdadeira é $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = f(4)$ e $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) \neq 4$

26. Resposta:

Vamos calcular o valor de $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^5(x+8)^7}{(x-1)^{10}(x+3)^2} = \frac{(2.\infty-1)^5(\infty+8)^7}{(\infty-1)^{10}(\infty+3)^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$,vamos levantar a indeterminação:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^5(x+8)^7}{(x-1)^{10}(x+3)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x\left(2-\frac{1}{x}\right)\right)^5\left(x\left(1+\frac{8}{x}\right)\right)^7}{\left(x\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)^{10}\left(x\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^5\times\left(2-\frac{1}{x}\right)^5\times x^7\times\left(1+\frac{8}{x}\right)^7}{x^{10}\times\left(1-\frac{1}{x}\right)^{10}\times x^2\times\left(1+\frac{3}{x}\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^{12}\times\left(2-\frac{1}{x}\right)^5\times\left(1+\frac{8}{x}\right)^7}{x^{12}\times\left(1-\frac{1}{x}\right)^{10}\times\left(1+\frac{3}{x}\right)^2} = = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)^5\times\left(1+\frac{8}{x}\right)^7}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{10}\times\left(1+\frac{3}{x}\right)^2} =$$

$$\frac{\left(2-\frac{1}{\infty}\right)^5\times\left(1+\frac{8}{\infty}\right)^7}{\left(1-\frac{1}{\infty}\right)^{10}\times\left(1+\frac{3}{\infty}\right)^2} =$$

$$= \frac{(2-0)^5\times(1+0)^7}{(1-0)^{10}\times(1+0)^2} = = \frac{(2)^5\times(1)^7}{(1)^{10}\times(1)^2} = \frac{2}{1} = 2$$

27. Resposta:

Calculando o valor de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+3x^2-12}{x^4+5x^3+6}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x^2-12}{x^4+5x^3+6} = \frac{0^3+3\times 0^2-12}{0^4+5\times 0^3+6} = \frac{-12}{6} = -2$$

28. Resposta:

Cálculo diferencial

- **Definição da derivada de uma função**

Dada uma função *F(x)* definida no domínio D_F, sendo *a* abcissa de um ponto P, tal que $a \in D_F$. A derivada da função *F(x)* no ponto P é dada pela expressão:

$$F'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{a-h} \quad \text{ou}$$

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x-h} = f(x)$$

A função *f(x)* chama – se a primeira derivada.

Regras de derivação imediata

Função constante

$f(x)=k \Rightarrow \quad f'(x)=0$

Função potência

$f(x)=x^n \Rightarrow \quad f'(x)=nx^{n-1}$

Função polinomial

Função composta

$f(x)=a_0x^n + a_1x^{n-1}+\ldots+a_n \Rightarrow$

$f'(x)=\left(a_0x^n\right)' + \left(a_1x^{n-1}\right)' + \ldots + \left(a_n\right)'$

Derivada da soma

$f(x)=u\pm v \Rightarrow \quad f'(x)=u'\pm v'$

Função afim

$f(x)=ax+b \Rightarrow \quad f'(x)=a$

Função produto

$f(x)=u\times v \Rightarrow \quad f'(x)=u'v+uv'$

Função quociente

$f(x)=\frac{u}{v} \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Função composta

$f(x)=u^n \Rightarrow \quad f'(x)=nu^{n-1}u'$

Derivada da função exponêncial

Função exponêncial de base *e*

$f(x)=e^u \Rightarrow \quad f'(x)=u'e^u$

Função exponêncial de base *a*

$f(x)=a^u \Rightarrow \quad f'(x)=u'a^u \ln(a)$

Derivada da função logarítmica

Função logarítmica de base *e*

Calculando o valor de $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$

Baseando no limite *euleriano* $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k$ teremos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = e^3$$

29. Resposta:

A função $f(x)=\frac{x^2-1}{(x-1)(x+2)}$ tem ponto de descontinuidade eliminável no ponto de abcissa *x=1*, veja:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{(x-1)(x+2)} \Leftrightarrow f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)} \Leftrightarrow f(x)=\frac{x+1}{x+2} \wedge \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+2}=\frac{2}{3}$$

30. Resposta:

Consideremos a função real de variável real que se segue:

$$f(x)=\begin{cases} k, se\ x=-3 \\ \frac{x^2-9}{x+3},\ se\ x\neq -3\end{cases}$$

o valor de *k* para que a função *f(x)* seja continua em *x= -3* segue:

$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3} f(x) = f(-3)$, neste caso para $f(-3)=k$, a condição $\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^+} f(x)$ equivale afirmar que existem o limite de f(x) no ponto de abcissa x= -3, então podemos escrever

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to -3}\frac{(x-3)(x+3)}{x+3} =$$

$$\lim_{x\to -3}(x-3) = -3-3 = -6 \Rightarrow f(-3) = -6 \therefore k=-6$$

31. Resposta:

Vamos calcular a primeira derivada da função $f(x)=ctg(x)$;

$$f(x)=ctg(x) \Leftrightarrow f(x)=\frac{\cos(x)}{sen(x)} \Rightarrow f'(x)=\left(\frac{\cos x}{senx}\right)'$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{(\cos x)'.senx - cox(senx)'}{sen^2x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{-senx.senx-\cos x\cos x'}{sen^2x} \Leftrightarrow f'(x)=-\frac{sen^2(x)+\cos^2(x)}{sen^2(x)}=-\frac{1}{sen^2(x)}$$

32. Resposta:

Vamos calcular a primeira derivada da função $f(x)=x^2e^x$;

$$f'(x)=\left(x^2e^x\right)' \Leftrightarrow f'(x)=\left(x^2\right)'e^x + x^2\left(e^x\right)' = 2xe^x + x^2e^x = e^x(2x+x^2)$$

33. Resposta:

Dada a função $f(x)=2x^3+x^2-x$, vamos determinar a primeira derivada desta função:

$$f'(x)=\left(2x^3+x^2-x\right)' \Leftrightarrow f'(x)=2.3x^2+2x-1 \Leftrightarrow f'(x)=6x^2+2x-1,$$

vamos determinar a segunda derivada,

$$f''(x)=\left(6x^2+2x-1\right)' \Leftrightarrow f''(x)=2.6x+2.1-0 \Leftrightarrow f''(x)=12x+2$$

$f(x)=\ln(u)\Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'}{u}$

Função logarítmica de base *a*

$f(x)=\log_a(a)\Rightarrow$

$f'(x)=\frac{u'}{u\ln(a)}$

Derivada da função trigonométrica
Função seno

$f(x)=sen(x)\Rightarrow \quad f'(x)=\cos(x)$

$f(x)=sen(u)\Rightarrow \quad f'(x)=u'\cos(u)$

Função co-seno

$f(x)=\cos(x)\Rightarrow \quad f'(x)=-sen(x)$

$f(x)=\cos(u)\Rightarrow \quad f'(x)=-u'\,sen(u)$

Intervalos de monotonia e primeira derivada de uma função

Teorema

Seja *f* uma função contínua em $[a,b]$ e derivavel em]a, b[.

- Se $f'(x)>0$ para todo $x\in]a,b[$, então *f* é estritamente crescente em $[a,b]$
- Se $f'(x)<0$ para todo $x\in]a,b[$, então *f* é estritamente decrescente em $[a,b]$

Máximos e mínimos absolutos e primeira derivada de uma função

Teorema

Seja *f* uma função contínua em $[a,b]$ e tem um máximo ou um mínimo em ***c*** do intervalo $]a,b[$, então $f'(c)=0$ ou $f'(c)$ não existe.

Um elemento *c* do domínio de uma função *f* é um ponto crítico de *f* se então $f'(c)=0$ ou $f'(c)$ não existe.

Álgebra
Polinómios

É uma soma de monómios não semelhantes

Um polinómio de uma variável tem a seguinte fórmula geral:

$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$

Onde

34. Resposta:

A função $f(x)=\frac{x-3}{x^2+2x-8}$ não é derivável nos pontos de abcissas A função $x=-4\wedge x=2$, veja a seguir:

$$f(x)=\frac{x-3}{x^2+2x-8}\Leftrightarrow f(x)=\frac{x-3}{(x+4)(x-2)},\ com\ x\neq -4\wedge x\neq 2$$

35. Resposta:

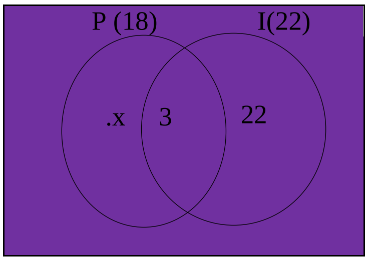
Fazendo um estudo rigoroso do gráfico dado aceita se que $f(0)<0$

- **Somente para Secção de Letras**

36. Resposta:

Todos nós sabemos não é verdade afirmar que $Z^+\cup Z_0^-=IR$

37. Resposta:



n(U)=40

$n(I)=?$

$\Rightarrow n(I)-3=22\Leftrightarrow$

$n(I)=22+3$

$n(I)=25$

São 25 pessoas que falam inglês.

38. Resposta:

$$\frac{P(x)}{x-2}=x^2+2x+9\wedge R(x)=25$$

Isso significa que $P(x)=(x-2)(x^2+2x+9)+25$

$$P(x)=(x-2)(x^2+2x+9)+25\Leftrightarrow p(x)=x^3+2x^2+9x-2x^2-4x-18+25\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(x)=x^3+5x+7$$

39. Resposta:

A função $f(x)=\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ é ***par*** porque objectos simétricos do mesmo domínio correspondem a mesma imagem.

40. Resposta:

Observando atentamente o gráfico da função dada conclui -se que o contradomínio da função é dado pelo conjunto $x]-\infty;4]$

- **Somente Para Secção de Ciências**

36. Resposta:

Dado o ponto *P(3;2)* e a equação da recta *4x-3y+9=0*

De uma forma geral a distância entre um ponto e uma recta no plano é dada pela equação

$$d(P,r)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\Rightarrow d(P,r)=\frac{|4\times 3-3\times 2+9|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|12-6+9|}{\sqrt{25}}=\frac{|15|}{5}=\frac{15}{5}=3$$

37. Resposta:

Vamos determinar a expressão analítica da inversa da função $f(x)=3\times\log_2(1-x)$

$a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in IR \wedge n \in IN$

Regra de Ruffin

É uma regra que é usada para determinar o quociente entre o polinómio de grau *n* e um binómio línear *x - a*.

Teoria de Conjunto

Conjunto é uma colecção de objectos da mesma espécie.

Operações sobre conjutos

Reunião de conjuntos
Intersecção de conjuntos
Diferença de conjuntos
Complementar de conjuntos

Geometria analítica

Dado um ponto P(x_0, y_0) e recta r: $Ax + Bx + C = 0$ no plano, a distância entre o ponto P e a recta *r* representada por d(P, r) é dada por:

$$d(P,r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Função homográfica

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, com\ cx + d \neq 0$$

Números complexos

Para responder o número 38 é preciso ter conhecimentos profundo de números complexos conjugados

Números complexos conjugados

Dois números complexos dizem – se conjugados quando tem partes reais iguais e partes imaginárias simétricas. O onjugado de número complexo z representa – se por $\overline{z}$
Exemplo:
$3+4i \wedge 3-4i$ são dois números complexos conjugados.

Primitiva de uma função

As regras de primitivação de funções obtém – se através das regras de derivação, assim temos:

$$\int (k)dx = kx + c$$

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

$$f(x) = 3 \times \log_2(1-x) \Rightarrow y = 3 \times \log_2(1-x) \Leftrightarrow \frac{y}{3} = \log_2(1-x) \Leftrightarrow 1 - x = 2^{\frac{y}{3}}$$

$$\Leftrightarrow -x = 2^{\frac{y}{3}} - 1 \Leftrightarrow x = 1 - 2^{\frac{y}{3}} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = 1 - 2^{\frac{x}{3}}$$

38. Resposta:

Vamos determinar o domínio da função $g(x) = \log_2|x|$

$D_g = \{x \in IR : |x| > 0\}$, vamos resolver analiticamente a inequação modular $|x| > 0 \Rightarrow x > \vee x < 0 \Rightarrow D_g = IR \setminus \{0\}$

39. Resposta:

Vamos resolver a equação $x^2 + 4 = 0$ em conjunto de números complexos:

$$x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-4} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4 \times (-1)} = \pm\sqrt{4} \times \sqrt{-1} = \pm 2i \Rightarrow x_1$$

40. Resposta:

Vamos encontrar a primitiva :

$$\int (x^4 + 3x^2 + 1)dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + 3 \times \frac{x^{2+1}}{2+1} + 1 \times \frac{x^{0+1}}{0+1} + C$$

$$\Leftrightarrow \int (x^4 + 3x^2 + 1)dx = \frac{x^5}{5} + 3 \times \frac{x^3}{3} + 1 \times \frac{x^1}{1} + C$$

$$\Leftrightarrow \int (x^4 + 3x^2 + 1)dx = \frac{x^5}{5} + x^3 + x + C$$

FIM

$\int (ku)dx = k\int xdx$

$\int u^n u'\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

$\int (u \pm v)dx = \int udx + \int vdx$

$\int \frac{u'}{u}dx = \ln|u| + C$

$\int e^u u'\,dx = e^u + c$

$\int a^u u'\,dx = \frac{a^u}{\ln(a)} + C$

$\int \sin xdx = -\cos x + C$

$\int \cos xdx = \sin x + C$

Integração por parte

$\int uv'\,dx = uv - \int u'\,vdx$

Função Modular

Para responder o número 40 é preciso ter conhecimentos profundo de tipos de funções modulares

Tipos de funções modulares

Função modular do tipo $y = f(|x|)$

Função modular do tipo $y = |f(x)|$

Função modular do tipo $y = |f(|x|)|$

Resolução de Exame de Matemática – 12ª. Classe

Ano: 2017/ 2ª Época

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

❖ **Conceitos básicos**

Operações sobre proposições lógicas

Na lógica matemática estdaa – se as seguintes operações sobre proposições:

Negação de uma proposição
Conjuncão de proposições
Disjunção de proposições
Implicação material
Equivalência materail

Expressão algebrica

Uma expressão algebrica diz – se irracional quando a variável aparece sob forma de um radicando.
Repare qu a expressão do número 3, a variável aparece dentro do radical com índice 3, e a varável aparece também sob forma de denominador, visto que não existem um número real que pode anular o denominador, razão pelo qual todo número real define a expressão dada.

Equação

Já foi dito que uma equação é a comparação de duas expressões designatórias por meio de símbolo de igualdade.

Equação exponêcial: é toda equação em que a incógnita aparece sob forma de um expoente de base a, sendo a positivo e diferente de unidade.

Determinantes de sistemas de equações líneares

A representação da forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ chama – se

determinante proviniente de uma matriz de 3 por 3

Exame de Matemática – 12ª classe, Ano: 2017/ 2ª Época

Resoluções

1. **Resposta:**

A negação da expressão $4+8<13$ é:
Seja $p:4+8<13 \Rightarrow \sim p:\sim(4+8<13) \Leftrightarrow \sim p:4+8\geq 13$.

2. **Resposta:**

p	q	$\sim q$	$p\vee\sim q$	$\sim q\Rightarrow p$
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	0

$x=0\wedge y=1$

3. **Resposta:**

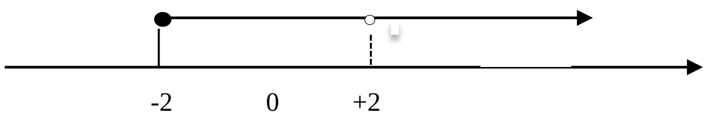
A expressão $\sqrt{5}x$ é racional inteira.

4. **Resposta:**

Vamos determinar o domínio de existência da expressão $\dfrac{\sqrt{2x+4}}{x^2-4x+4}$

$$D=\{x\in IR:2x+4\geq 0\wedge x^2-4x+4\neq 0\}\Rightarrow 2x+4\geq 0\wedge(x-2)(x-2)\neq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x\geq -4\wedge x-2\neq 0\wedge x-2\neq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{-4}{2}\wedge x\neq 2\Leftrightarrow x\geq -2\wedge x\neq 2$$



$$D=[-2;+\infty[\setminus\{2\}$$

5. **Resposta:**

Pretendemos determinar a soma de 7 com a solução da equação $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=117$

$$3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=117\Leftrightarrow 3^x+3\times 3^x+3^2\times 3^x=117\Leftrightarrow 3^x\times(1+3+9)=117$$

$$3^x\times 13=117\Leftrightarrow 3^x=\frac{117}{13}\Leftrightarrow 3^x=9\Leftrightarrow 3^x=3^2\Rightarrow x=2$$

$$\Rightarrow 7+2=9$$

6. **Resposta:**

A equação $x^4-2x^2+1=0$ é biquadrática, vamos resolve – la e depois somar as suas raízes:

$$x^4-2x^2+1=0\Leftrightarrow x^2.x^2-2x^2+1=0\Leftrightarrow\left(x^2\right)^2-2x^2+1=0\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-1=0\vee x^2-1=0\Leftrightarrow x^2=1\vee x^2=1\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{1}\vee x=\pm\sqrt{1}\Leftrightarrow x=\pm 1\vee x\pm 1$$

$$\{,-1,1,\}\Rightarrow S=-1+(-1)+1+1=-2+2=0$$

7. **Resposta:**

Pretendemos determinar a solução da equação $\log_2(x)+\log_4(x)=1$

Razões trigonométricas de alguns arcos

x	0	30	45	60	90
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tag	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0
ctg	ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	ND

Fórmula fundamental da trigonometria

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$$

Outras relações trigonométricas

$$tg(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$ctg(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Módulo ou valor absoluto de um número real

Chama – se módulo ou valor absoluto de um número real x ao próprio nómero se este for não negativo ou ao seu simétrico se este for negativo.

$$|x|=\begin{cases} x, se\, x\geq 0 \\ -x, se\, x<0 \end{cases}$$

Equação modular: é toda equação que por meio de princípios de equivalência é redutível a forma:

$$|x|=a$$

A solução da equação acima segue:

$$|x|=a \Leftrightarrow x=a \vee x=-a$$

Factorial de um número natural

O factorial de um número natural n é dado por:

$$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 1$$

Exemplo:

$$5!=5\times 4\times 3\times 2\times 1$$

$$5!=120$$

Permutação

A solução tem que estar dentro do conjunto $x\in IR^+$

$$\log_2(x)+\log_4(x)=1\Leftrightarrow \log_2(x)+\log_{2^2}(x)=1\Leftrightarrow \log_2(x)+\frac{1}{2}\log_2(x)=\log_2(x)$$

$$\log_2(x)+\log_4(x)=1\Leftrightarrow \log_2(x)+\log_{2^2}(x)=1\Leftrightarrow \log_2(x)+\frac{1}{2}\log_2(x)=\log_2(x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x)+\log_2(\sqrt{x})=\log_2(2)\Leftrightarrow \log_2(x.\sqrt{x})=\log_2(2)\Rightarrow x\sqrt{x}=2\Leftrightarrow (x\sqrt{x})^2=2^2$$

$$\Leftrightarrow x^2.x=4\Leftrightarrow x^3=4\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{4}$$

8. Resposta:

Vamos resolver a inequação $\frac{x-1}{x+3}<0$ por auxílio de uma tabela de variação de sinal. Seja

$$x-1=0\wedge x+3=0\Leftrightarrow x=1\wedge x=-3$$

x	$]-\infty;-3[$	-3	$]-3;1[$	1	$]1;+\infty[$
$x-1$	—	-4	—	0	+
$x+3$	—	0	+	4	+
$\frac{x-1}{x+3}$	+	ND	—	0	+

A fracção $\frac{x-1}{x+3}$ é menor que zero se e somente se $x\in]-3;1[$, logo $\frac{x-1}{x+3}<0$ se $x\in]-3;1[$

9. Resposta:

Vamos resolver a equação $sen^2(x)=sen(x)$, em IR:

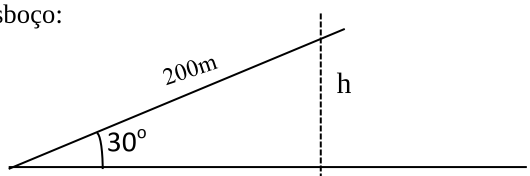
$$sen^2(x)=sen(x)\Leftrightarrow sen^2(x)-sen(x)=0\Leftrightarrow sen(x)(sen(x)-1)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sen(x)=0\vee sen(x)-1=0\Leftrightarrow sen(x)=sen(\pi k)\vee sen(x)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\pi k\vee sen(x)=sen\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\Leftrightarrow x=\pi k\vee x=\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ k\in Z$$

10. Resposta:

Esboço:



$$sen(30^o)=\frac{h}{200}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{h}{200}\Leftrightarrow 1\times 200=2h\Leftrightarrow 2h=200\Leftrightarrow h=\frac{200}{2}\Rightarrow h=100m$$

A altura atingida pelo avião é de 100m aproximadamente

A permutacao de n elementos tomados p a p, é dado por:

$P_n = n!$ ou

$P_n = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 1$

$n \equiv p$

Exemplo:

$p_4 = 4\times 3\times 2\times 1$

$p_4 = 24$

Aranjos Simples

Aranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!},\ n > p$$

Exemplo:

$$A_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} \Leftrightarrow A_2^4 = \frac{4!}{2!}$$

$$A_2^4 = \frac{4\times 3\times 2!}{2!} \Leftrightarrow A_2^4 = 12$$

Combinação simples

Combinação simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)!\times p!},\ n > p$$

Exemplo:

$$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{4!}{2!\times 2!}$$

$$C_2^4 = \frac{4\times 3\times 2!}{2\times 1\times 2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{12}{2}$$

$$C_2^4 = 6$$

Binómio de Newton

Binómio de Newton é uma expressão que envolve combinação simples, essa expressão é usada para desenvolver os polinómios que aparecem sob forma de binómios potenciais

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + \ldots + C_n^n y^n$$

Definição clássica de Probabilidade

Se os acontecimentos elemntares forem equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimnto e o número de casos possíveis.

11. Resposta:

A condição para que $|1-3x|+x+7$ seja igual a $8-2x$ segue:

Vamos igualar $|1-3x|+x+7$ com $8-2x$, assim:

$$|1-3x|+x+7 = 8-2x \Leftrightarrow |1-3x| = 8-2x-x-7 \Leftrightarrow |1-3x| = 1-3x$$

Pela definição do módulo de um número real temos:

$$|1-3x| = \begin{cases} 1-3x,\ se\ 1-3x \geq 0 \\ -(1-3x),\ se 1-3x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

A condição para que $|1-3x|+x+7$ seja igual a $8-2x$ é

$$1-3x \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq \frac{-1}{-3} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$$

12. Resposta:

Vamos resolver a equação modular: $|3x-1| = -2$,

Pela definição do módulo de um número real, a equação $|3x-1| = -2$ é impossível em R. $x \in \{\ \}$

13. Resposta:

A expressão equivalente a $\frac{n!+(n-1)!}{n!}$ segue:

$$\frac{n!+(n-1)!}{n!} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)!+(n-1)!}{n(n-1)!} \Leftrightarrow \frac{(n-1)![n+1]}{n(n-1)!} = (n+1) = \frac{n+1}{n}$$

14. Resposta:

Vamos escrever o espaço de amostra: $S = \{1,2,3,54,5,6\}$

Acontecimentos:

M : *Sair face de um número ímpar*; N: *Sair face de um número maior ou igual a 4.*

$M \cup N$: Sair face de um número ímpar ou sair face de um número maior ou igual a 4

$M \cup N = \{1,3,4,5,6\}$

O acontecimento contrário de $M \cup N$ é $\overline{M \cup N}$: recorrendo as propriedades de operações sobre conjuntos, teremos: $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$, O complementar transforma a união em intersecção de complementares, sendo assim, temos: o evento contrário de $M \cup N$ é $\overline{M} \cap \overline{N}$:

$\overline{M} \cap \overline{N} = \{2\}$, logo o evento contrario de $M \cup N$ é sair face 2

15. Resposta:

Sabe se que no sistema numérico usual existe 10 algarismos de 0 a 9, assim:

$A = \{0,1,2,3,54,5,6,7,8,9\}$, neste conjunto vamos retirar dois algarismos , 0 e 1 que não são usados para formar numero telefónica da vila. Cada número de telefone tem uma sequência de 3 algarismos diferentes, por exemplo, 234, 432 e 324 são números telefónicos diferentes, excluindo a possibilidade da existência de número telefónicas como 222, 233, 344. Logo neste problema temos que trabalhar com 8 elementos (algarismos) e agrupando – os três em três sem repeti – los, pois a ordem de cada elemento é importante, fica claro que temos explorar a fórmula de arranjos simples sem repetição:

$$A_3^8 = \frac{8!}{(8-3)!} \Leftrightarrow A_3^8 = \frac{8\times 7\times 6\times 5!}{5!} = 8\times 7\times 6 = 336$$ a vila tem 336 numero de telefones.

.

16. Resposta:

$P(A)=\frac{n(C.F)}{n(C.P)}$, $n(CF)\geq n(CP)$

Limite de uma sucessão

Sucessão convergente

Diz – se que uma sucessão (a_n) converge para um número real L (escreve – se $\lim a_n = L$)

Se, por muito pequeno que seja o número positivo δ se existir uma ordem ***p*** a apartir da qual se tem

$|a_n - L| < \delta$, isto é, $|a_n - L|$ torna tão pequena quando se queira.

Progressão aritmética (PA)

Uma sucessão (a_n) é uma progressão aritmética (P.A) se existe um número real r, tal que

$$a_{n+1} - a_n = r, \forall n \in IN$$

Ao número *r* chama – se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.A:

$$a_n = a_1 + (n-1)\times r$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão aritmética é dada por:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\times r}{2}\times n$$

Progressão geométrica (PG)

Uma sucessão (a_n) é uma progressãogeotmética (P.G) se existeum número real r, tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \forall n \in IN$

Ao número *r* chama – se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.G:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão geométrica é dada por:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

Algumas operações com infinitos

$k\times\infty=\infty$

$\infty^k=\infty$

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

Dados do problema dizem que no grupo há 120 pessoas entre homens e mulheres, e a probabilidade de escolher um homem é $\frac{5}{8}$, pela definição clássica de probabilidade temos:

$$P(H)=\frac{n(H)}{120} \Leftrightarrow \frac{5}{8}=\frac{n(H)}{120} \Leftrightarrow 5\times 120 = 8\times n(H) \Rightarrow n(H)=\frac{5\times 120}{8} \Leftrightarrow n(H)=75$$

No grupo há 75 homens.

17. Resposta:

$x-3; x; x+6$ São termos consecutivos de uma PG, pretende se encontrar o valor de incógnita *x*, assim:

$\frac{x+6}{x}=\frac{x}{x-3}$ Condição para que uma sucessão seja PG.

$$\frac{x+6}{x}=\frac{x}{x-3} \Leftrightarrow (x-6)(x-3) = x\times(x) \Leftrightarrow x^2-9x+18 = x^2 \Leftrightarrow x^2-x^2-9x+18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -9x+18 \Leftrightarrow -9x=-18 \Leftrightarrow x=\frac{-18}{-9} \Rightarrow x=2$$

18. Resposta:

Considere a sucessão $2;-5;8;-11;...$

Vamos determinar os valores absolutos dos termos da sucessão dada, assim: $|2|=2; |-5|=5; |8|=8; |-11|=11;...$ a sucessão ganha a forma: $2;\ 5;\ 8;\ 11;...$

Fazendo $a_1=2;\ a_2=5;\ a_3=8;\ a_4=11;... \Rightarrow 11-8=8-5=5-2=3$ a diferença entre $a_{n+1}\ e\ a_n$ é constante pois é igual a 3 unidades.

$$a_n = a_1+(n-1)d \Rightarrow a_n = 2+(n-1)\times 3 \Leftrightarrow a_n = 3n-3+2 \Leftrightarrow a_n = 3n-1$$

.Não se esquecendo que a sucessão é alternada, o seu termo geral deve ter factor $(-1)^{n+1}$, logo, o termo geral pedido pelo enunciado será:

$$b_n = a_n \times (-1)^{n+1} \Rightarrow b_n = (3n-1)(-1)^{n+1}$$

19. Resposta:

Considerando a sucessão de termo geral $a_n = 2n+1$

A ordem do termo 17 segue:

$$a_n = 2n+1, n=? \Rightarrow u_n = 17 \Leftrightarrow 17 = 2n+1 \Leftrightarrow 2n+1=17 \Leftrightarrow 2n=17-1 \Leftrightarrow 2n=16 \Leftrightarrow n=\frac{16}{2}$$

$$\Rightarrow n=8$$

17 é termo de ordem 8.

20. Resposta:

Vamos aplicar directamente a fórmula da soma de *n* termos de PA, $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\times n$

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\times n,\ a_1=4, a_{13}=40,\ n=13 \wedge a_{13}$$

$$\Rightarrow S_{13}=\frac{4+40}{2}\times 13 \Leftrightarrow S_{13}=22\times 13=286$$

21. Resposta:

Considere $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+...=20$, vamos determinar o valor de *x* na condição anterior,

$\infty \times \infty = \infty$

$k + \infty = \infty$

$k - \infty = -\infty$

$\frac{\infty}{k} = \infty$

$\frac{k}{\infty} = 0$

Limite de uma função real de variável real

Dada uma função *f(x)* definida no domínio D_f, *a, L* são números reais. Diz – se, *L* é o limite da função *f(x)* quando *x* tende para *a* (*a* não necessariamente pertecente ao domínio de *f(x)*) sse:

$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

e escreve – se $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Conheça alguns limites notáveis

- **Limites Neperianos**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^k$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^p} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$$

- **Limites trigonométricass**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Continuidade de funções reais de variáveis reais

Uma função real de variàvel real é contínua num ponto de abcissa $x = a$ sse,

$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Se existir a diferença entre os mmbros dessa igualdade, a função é descontinua no ponto de abcissa *a*

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

Seja $a_1 = x; a_2 = \frac{x}{2}; a_3 = \frac{x}{4};...$

$\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} \rightarrow$ Condição para a sequência seja uma PG.

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} \Leftrightarrow \frac{\frac{x}{4}}{\frac{x}{2}} = \frac{\frac{x}{2}}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{4}\times\frac{2}{x} = \frac{x}{2}\times\frac{1}{x} = \frac{1}{2} = q$$

Uma vez a razão é igual a $\frac{1}{2} \wedge a_1 = x$ e a fórmula da soma de n termos de uma progressão geométrica diz:

$$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-1} \Rightarrow S_n = 20 \Leftrightarrow 20 = x\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 20 = x\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 10 = x\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

Aplicando limite ambos os membros da última igualdade termos:

$$\lim 10 = \lim x\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right); n\to\infty \Leftrightarrow 10 = x\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^\infty\right) \Leftrightarrow 10 = x(1-0) \Leftrightarrow 10 = x \Rightarrow x = 10$$

22. Resposta:

$\Rightarrow g(x) = tg(x)$, em IR, o domínio da função tangente é $IR \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k\right\}$ com k inteiro, portanto o possível domínio dentre as opções representada pode ser o conjunto $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

23. Resposta:

O gráfico da função homógrafa elementar é impar e injectiva, a opção certa é C.

24. Resposta:

O valor de

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x-1)^5(x+8)}{x^6-1}\right) = \frac{(2.\infty-1)^5(\infty+8)}{\infty^6-1} = \frac{.(\infty-1)^5\times\infty}{\infty-1} = \frac{\infty^5\times\infty}{\infty} = \frac{\infty\times\infty}{\infty} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Vamos levantar a indeterminação:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x-1)^5(x+8)}{x^6-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(\left(x\left(2-\frac{1}{x}\right)\right)^5\left(x\left(1+\frac{8}{x}\right)\right)\right)}{\left(x^6\left(1-\frac{1}{x^6}\right)\right)}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^5\left(2-\frac{1}{x}\right)^5 x\left(1+\frac{8}{x}\right)}{x^6\left(1-\frac{1}{x^6}\right)}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^5\times x\left(2-\frac{1}{x}\right)^5\left(1+\frac{8}{x}\right)}{x^6\left(1-\frac{1}{x^6}\right)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^6\left(2-\frac{1}{x}\right)^5\left(1+\frac{8}{x}\right)}{x^6\left(1-\frac{1}{x^6}\right)}\right) =$$

Cálculo diferencial

- **Definição da derivada de uma função**

Dada uma função *F(x)* definida no domínio D_F , sendo *a* abcissa de um ponto P, tal que $a \in D_F$. A derivada da função *F(x)* no ponto P é dada pela expressão:

$$F^{/}(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{a-h} \quad \text{ou}$$

$$F^{/}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x-h} = f(x)$$

A função *f(x)* chama – se a primeira derivada.

Regras de derivação imediata

Função constante

$f(x)=k \Rightarrow \quad f'(x)=0$

Função potência

$f(x)=x^n \Rightarrow \quad f'(x)=nx^{n-1}$

Função polinomial

Função composta

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n \Rightarrow$

$f'(x)=(a_0x^n)'+(a_1x^{n-1})'+...+(a_n)'$

Derivada da soma

$f(x)=u\pm v \Rightarrow \quad f'(x)=u'\pm v'$

Função afim

$f(x)=ax+b \Rightarrow \quad f'(x)=a$

Função produto

$f(x)=u\times v \Rightarrow \quad f'(x)=u'v+uv'$

Função quociente

$f(x)=\frac{u}{v} \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Função composta

$f(x)=u^n \Rightarrow \quad f'(x)=nu^{n-1}u'$

Derivada da função exponêncial

Função exponêncial de base *e*

$f(x)=e^u \Rightarrow \quad f'(x)=u'e^u$

Função exponêncial de base *a*

$f(x)=a^u \Rightarrow \quad f'(x)=u'a^u\ln(a)$

Derivada da função logarítmica

Função logarítmica de base *e*

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)^5\left(1+\frac{8}{x}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^6}\right)}\right)=$$

$$=\left(\frac{\left(2-\frac{1}{\infty}\right)^5\left(1+\frac{8}{\infty}\right)}{\left(1-\frac{1}{\infty^6}\right)}\right)=\left(\frac{(2-0)^5(1+0)}{\left(1-\frac{1}{\infty}\right)}\right)=\left(\frac{(2)^5\times(1)}{(1-0)}\right)=\frac{2^5}{1}=32$$

25. Resposta:

Calculando o valor de $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)$, teremos:

$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)=\sqrt{\infty+3}-\sqrt{\infty}=\sqrt{\infty}-\infty=[\infty-\infty]$, este não é um numero real, temos que redefinir o limite como segue:

$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)$, vamos multiplicar e dividir pelo seu conjugado:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\left(\sqrt{x+3}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+3-x)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+3-x)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)}=\frac{3}{\left(\sqrt{\infty+3}+\sqrt{\infty}\right)}=$$

$$\frac{3}{\left(\sqrt{\infty}+\infty\right)}=\frac{3}{(\infty+\infty)}=$$

$$\frac{3}{(\infty+\infty)}=\frac{3}{\infty}=0$$

26.Resposta:

Calculando o valor de $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^x$, teremos:

Baseando no limite *euleriano* $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$ teremos.

Atenção, a parcela $\left(-\frac{5}{x}\right)$ é negativa, temos que lhe transformar para ter mesma estrutura do limite $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$, assim, $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{x}\right)^x$, fazendo *-5 = k*, temos $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k; se\,k=-5 \Rightarrow =\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{x}\right)^x=e^{-5}=\frac{1}{e^5}$

$f(x)=\ln(u)\Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'}{u}$

Função logarítmica de base *a*

$f(x)=\log_a(a)\Rightarrow$

$f'(x)=\frac{u'}{u\ln(a)}$

Derivada da função trigonométrica
Função seno

$f(x)=sen(x)\Rightarrow \quad f'(x)=\cos(x)$

$f(x)=sen(u)\Rightarrow \quad f'(x)=u'\cos(u)$

Função co-seno

$f(x)=\cos(x)\Rightarrow \quad f'(x)=-sen(x)$

$f(x)=\cos(u)\Rightarrow \quad f'(x)=-u'sen(u)$

Intervalos de monotonia e primeira derivada de uma função

Teorema

Seja *f* uma função contínua em $[a,b]$ e derivavel em]a, b[.

- Se $f'(x)>0$ para todo $x\in]a,b[$, então f é estritamente crescente em $[a,b]$
- Se $f'(x)<0$ para todo $x\in]a,b[$, então f é estritamente decrescente em $[a,b]$

Máximos e mínimos absolutos e primeira derivada de uma função

Teorema

Seja *f* uma função contínua em $[a,b]$ e tem um máximo ou um mínimo em ***c*** do intervalo $]a,b[$, então $f'(c)=0$ ou $f'(c)$ não existe.

Um elemento *c* do domínio de uma função *f* é um ponto crítico de *f* se então $f'(c)=0$ ou $f'(c)$ não existe.

Álgebra
Polinómios

É uma soma de monómios não semelhantes

Um polinómio de uma variável tem a seguinte fórmula geral:

$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$

Onde

27. Resposta:

Calculando o valor de $\lim_{x\to0}\frac{sen(4x)+sen(3x)-sen(2x)}{5x}$

$$\lim_{x\to0}\frac{sen(4x)+sen(3x)-sen(2x)}{5x}=\frac{sen(4.0)+sen(3.0)-sen(2.0)}{5.0}=\frac{sen(0)+sen(0)-sen(0)}{0}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{sen(4x)+sen(3x)-sen(2x)}{5x}=\left[\frac{0}{0}\right]$$ Indeterminação, vamos redefinir o limite,

$$\lim_{x\to0}\frac{sen(4x)+sen(3x)-sen(2x)}{5x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{sen(4x)}{5x}+\frac{sen(3x)}{5x}-\frac{sen(2x)}{5x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{sen(4x)+sen(3x)-sen(2x)}{5x}=\lim_{x\to0}\frac{sen(4x)}{5x}+\lim_{x\to0}\frac{sen(3x)}{5x}-\lim_{x\to0}\frac{sen(2x)}{5x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4x\times sen(4x)}{4x\times5x}+\lim_{x\to0}\frac{3x\times sen(3x)}{3x\times5x}-\lim_{x\to0}\frac{2x\times sen(2x)}{2x\times5x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{4x}{5x}\times\frac{sen(4x)}{4x}\right)+\lim_{x\to0}\left(\frac{3x}{5x}\times\frac{sen(3x)}{3x}\right)-\lim_{x\to0}\left(\frac{2x}{5x}\times\frac{sen(2x)}{2x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4x}{5x}\times\lim_{x\to0}\frac{sen(4x)}{4x}+\lim_{x\to0}\frac{3x}{5x}\times\lim_{x\to0}\frac{sen(3x)}{3x}-\lim_{x\to0}\frac{2x}{5x}\times\lim_{x\to0}\frac{sen(2x)}{2x}\to\lim_{x\to0}\frac{sen(f(x))}{f(x)}=1$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4}{5}\times1+\lim_{x\to0}\frac{3}{5}\times1-\lim_{x\to0}\frac{2}{5}\times1=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}-\frac{2}{5}=\frac{4+3-2}{5}=\frac{7-2}{5}=\frac{5}{5}=1$$

28. Resposta:

Dada a função $f(x)=\begin{cases}k+px\ ,x>2\\ 3\ ;se\,x=2\\ p-kx^2;x<2\end{cases}$, para que , $=\lim_{x\to2}f(x)$ exista e seja igual a f(2), é necessário que f(x) seja continua em x=2, assim,

$$=\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}f(x)=f(2)$$

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}f(x)=f(2)\Rightarrow\lim_{x\to2^-}\left(p-kx^2\right)=\lim_{x\to2^+}(k+px)=3\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to2^-}\left(p-kx^2\right)=\lim_{x\to2^+}(k+px)=3\Leftrightarrow\left(p-k.2^2\right)=k+p.2=3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p-4k=k+2p=3\Leftrightarrow\begin{cases}p-4k=k+2p\\ k+2p=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5k-p=0\\ k+2p=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=-5k\\ k-10k=3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}p=-5k\\ -9k=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=-5k\\ -3k=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=\frac{5}{3}\\ k=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

29. Resposta:

O gráfico que representa um ponto de descontinuidade eliminável é da opção C.

30. Resposta:

O gráfico *y=f(x)* tem primeira derivada nula no intervalo $x\in\left]-1;2\right[$

$a_0,\ a_1, a_2, ..., a_n \in IR \wedge n \in IN$

Regra de Ruffin

É uma regra que é usada para determinar o quociente entre o polinómio de grau *n* e um binómio línear *x - a*.

Teoria de Conjunto

Conjunto é uma colecção de objectos da mesma espécie.

Operações sobre conjutos

Reunião de conjuntos
Intersecção de conjuntos
Diferença de conjuntos
Complementar de conjuntos

Geometria analítica

Dado um ponto P(x_0, y_0) e recta r: $Ax + Bx + C = 0$ no plano, a distância entre o ponto P e a recta *r* representada por d(P, r) é dada por:

$$d(P,r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Função homográfica

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, com\ cx+d \neq 0$$

Números complexos

Para responder o número 38 é preciso ter conhecimentos profundo de números complexos conjugados

Números complexos conjugados

Dois números complexos dizem – se conjugados quando tem partes reais iguais e partes imaginárias simétricas. O onjugado de número complexo z representa – se por $\bar{z}$

Exemplo:

$3+4i \wedge 3-4i$ são dois números complexos conjugados.

Prmitiva de uma função

As regras de primitivação de funções obtém – se através das regras de derivação, assim temos:

$$\int (k)dx = kx + c$$

31. Resposta:

Dada a função $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, vamos determinar a primeira derivada da função *f:*

$$f(x) = e^{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \left(e^{\sqrt{x}}\right)' \Leftrightarrow f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' e^{\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

32. Resposta:

Dada a função $f(x) = \log_2(x)$, vamos determinar a primeira derivada da função:

$$f(x) = \log_2(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)' \Leftrightarrow f'(x) = \frac{(\ln x)'}{\ln 2} \Leftrightarrow f'(x) =$$

$$= \frac{\frac{x'}{x}}{\ln(2)} = \frac{1}{x\ln(2)}$$

33. Resposta:

Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$, para achar a segunda derivada de *f*, em primeiro lugar vamos achar a primeira derivada assim:

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1' \times x - 1 \times x'}{x^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{0-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2} \rightarrow$$

agora vamos a caça da segunda derivada a partir da primeira derivada assim,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' \Leftrightarrow f''(x) = -\frac{1' \times x^2 - 1 \times \left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} = -\frac{0-2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

34. Resposta:

Dada a função $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$, a função *f*, não é definida em $x = -1$, logo ela não é derivável em $x = -1$.

35. Resposta:

Se a segunda derivada de uma determinada função é constante, a sua primeira derivada é uma função do primeiro grau, logo a função primitiva é uma função do segundo grau, o gráfico da função do segundo grau é uma parábola. A opção correcta é A.

- **Somente Para Secção de Letras**

36. Resposta:

Se os graus dos polinómios dividendos e divisor são respectivamente *m* e *n*, então o grau do quociente é $m - n$

37. Resposta:

Seja $d(x) = x+1,\ q(x) = x^2 - 3x, \wedge r(x) = -5 ... D(x) = ?$

$\int (ku)dx = k\int xdx$

$\int u^n u'\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

$\int (u \pm v)dx = \int udx + \int vdx$

$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C$

$\int e^u u'\,dx = e^u + c$

$\int a^u u'\,dx = \frac{a^u}{\ln(a)} + C$

$\int \sin xdx = -\cos x + C$

$\int \cos xdx = \sin x + C$

Integração por parte

$\int uv'\,dx = uv - \int u'vdx$

Função Modular

Para responder o número 40 é preciso ter conhecimentos profundo de tipos de funções modulares

Tipos de funções modulares

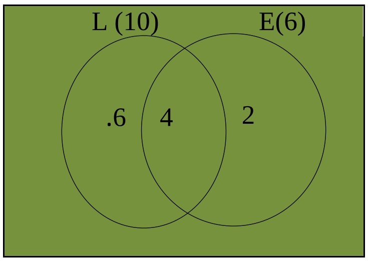
Função modular do tipo $y = f(|x|)$

Função modular do tipo $y = |f(x)|$

Função modular do tipo $y = |f(|x|)|$

$$D(x) = d(x) \times q(x) + r(x) \Rightarrow D(x) = (x+1) \times (x^2 - 3x) + (-5) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow D(x) = x^3 - 3x^2 + x^2 - 3x - 5 \Leftrightarrow D(x) = x^3 - 2x^2 - 3x - 5$$

38. Resposta ao problema:



n(U)=?

$n(L \cup E) = ?$

$\Rightarrow n(L \cup E) = n(L) + n(E) + n(L \cap E)$

$n(L \cup E) = 6 + 4 + 2 = 12$

São 12 pessoas que compraram esferográficas.

39. Resposta:

Sendo $y = f(x)$ tal que $f(-x) = -f(x)$, então $y = f(x)$ é ***impar*** porque objectos simétricos correspondem a imagens simétricas.

40. Resposta:

A opção que representa o gráfico certo é A.

- <u>**Somente Para Secção de Ciências**</u>

36. Resposta:

Dado os pontos $P(2;1) \wedge Q(1,4) \Rightarrow x_1 = 2; y_1 = 1; x_2 = 1 \wedge y_2 = 4$ o declive de uma recta que passa pelo dois pontos é determina se pela formula:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_2}{x_2 - x_1} \Rightarrow m = \frac{4-1}{1-2} = \frac{3}{-1} \Rightarrow m = -3$$

37.Resposta:

Dada a equação irracional $\sqrt{x^2+1} = x + 2$ vamos resolver em R:

$$\sqrt{x^2+1} = x + 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 = (x+2)^2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow x^2 - x^2 - 4x =$$
$$\Leftrightarrow -4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{-4} \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$$

Atenção, essa solução pode ser distraidora, portanto, vamos achar o domínio de existência da expressão algébrica irracional do primeiro membro:

$$D = \{x \in IR : x^2 + 1 \geq 0\}$$

$x^2 + 1 \geq 0$ tem como conjunto solução IR, logo a solução encontrada anteriormente está correcta.

38.Resposta:

Se o contradomínio da função $y = f(x)$ é $[-7;10]$ então o contradomínio de $g(x) = |f(x)|$ é $[0;10]$

39. Resposta:

. $i^{13} = i^2 \times i^2 \times i^2 \times i^2 \times i^2 \times i^2 \times i = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times i = i$

40. Resposta:

A primitva da função $y = f(x) = \frac{1}{x\ln(2)}$ segue:

$$\int f(x)dx = \int\left(\frac{1}{x\ln(2)}\right)dx \Leftrightarrow F(x) = \frac{1}{\ln(2)}\int\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow F(x) = \frac{1}{\ln(2)}\times\ln|x| + C \Leftrightarrow F($$

$$\Leftrightarrow F(x) = \log_2|x| + C$$

FIM

Resolução de Exame de Matemática – 12ª. classe

Ano: 2018/ 1ª Época

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

❖ Conceitos básicos

Operações sobre proposições lógicas

Na lógica matemática estdaa – se as seguintes operações sobre proposições:

Negação de uma proposição
Conjuncão de proposições
Disjunção de proposições
Implicação material
Equivalência materail

Expressão algebrica

Uma expressão algebrica diz – se irracional quando a variável aparece sob forma de um radicando.

Repare qu a expressão do número 3, a variável aparece dentro do radical com índice 3, e a varável aparece também sob forma de denominador, visto que não existem um número real que pode anular o denominador, razão pelo qual todo número real define a expressão dada.

Equação

Já foi dito que uma equação é a comparação de duas expressões designatórias por meio de símbolo de igualdade.

Equação exponêcial: é toda equação em que a incógnita aparece sob forma de um expoente de base *a*, sendo *a* positivo e diferente de unidade.

Determinantes de sistemas de equações lineares

A representação da forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ chama – se determinante proviniente de uma matriz de 3 por 3

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

Exame de Matemática – 12ª classe, Ano: 2018/ 1ª Época
Resoluções

1. Resposta:

Na lógica bivalente existem 7 operações lógicas, sendo todas sete operáveis sobre proposições e condições, as ultimas duas operáveis a condições: negação, conjunção, disjunção (inclusiva e exclusiva), equivalência material e implicação material. A operação que é verdadeira quando associa duas proposições lógicas com o mesmo valor lógico é a equivalência material, veja na tabela de verdade que se segue:

p	q	$p \Leftrightarrow q$		p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	ou	1	1	1
V	F	F		1	0	0
F	V	F		0	1	0
F	F	V		0	0	1

2. Resposta:

Vamos determinar a negação da proposição $p \Rightarrow q$, mas antes, sabe se que $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$, negar $p \Rightarrow q$ equivale negar $\sim p \vee q$, segue então $\sim(\sim p \vee q)$, essa é a negação de uma disjunção, as primeiras leis de De Morgan dizem que a negação transforma a disjunção em conjunção das proposições, assim: $\sim(\sim p \vee q) = \sim\sim p \wedge \sim q$, de acordo com a propriedade da dupla negação temos que $\sim\sim p = p$, logo, $\sim(p \Rightarrow q) = \sim(\sim p \vee p) = \sim\sim p \wedge \sim q = p \wedge \sim q$

3. Resposta:

As expressões polinomiais são idênticas se os coeficientes dos termos do mesmo grau são iguais, por exemplo, consideremos os polinómios A e B,

$$A(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \ldots + a_n$$

$$B(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + b_3x^{n-3} + \ldots + b_n$$

Os polinómios A e B são idênticas se e somente se $a_0 = b_0;\ a_1 = b_1;\ .a_2 = b_2\ ; a_4 = b_4\ ; a_n = b_n$

Vamos considerar $A(x) = x^3 + 1\ e\ B(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)$ para verificar se os polinómios A e B são ou não idênticos, há duas possibilidades: ou factorizar o *A(x)* e manter o *B(x)* factorizado, ou desenvolver o B(x) e manter o A(x), assim,

Vamos via primeira possibilidade, pela regra de ***Briot- Ruffin***: repare que o numero -1, anula o polinómio *A(x)* assim, $A(x) = x^3 + 0x^2 + 0x + 1\ e\ x = -1$

	1	0	0	1
-1				
	1	-1	1	0

Portanto a decomposição em factores do polinómio *A(x)* fica: $A(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)$, repare que $x^3 + 1\ e\ (x+1)(x^2 - x + 1)$ são idênticas.

Vamos pela via segunda possibilidade, expansão de *B(x):* Por aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição e\ou subtracção, teremos:

$$(x+1)(x^2 - x + 1) \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - x^2 + x - x + 1 \Leftrightarrow x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 1$$

4. Resposta:

Uma expressão diz se algébrica irracional, à expressão cuja variável aparece na expressão sob forma de radicando. Das expressões dadas, a variável aparece sob forma de radicando na expressão, $\dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{2}$, portanto essa é uma expressão algébrica irracional.

5. Resposta:

A expressão $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\sqrt{1-x}$ é algébrica irracional, o seu domínio é:

$$D=\{x\in R:1-x\geq 0\wedge x^2-1>0\}\Rightarrow 1-x\geq 0\wedge x^2+1>0\Leftrightarrow 1\geq x\wedge x^2+1>0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\leq 1\wedge x^2+1>0$$

A primeira condição é possível se $x\in \left]-\infty;1\right]$e a segunda condição é possível em IR, ou seja é uma condição universal, assim $\forall x\in IR: x^2+1\geq 0$, o domínio é dado por:

$$D=\left]-\infty;1\right]\cap IR\Leftrightarrow D=\left]-\infty;1\Leftrightarrow x\leq 1\right]$$

Observe isso no eixo real:

6. Resposta:

Dada a equação $x^3+x^2-6x=0$, essa é uma equação cubica incompleta, vamos calcular as raízes reais da equação $x^3+x^2-6x=0$ e depois somar essas raízes, colocando em evidência o factor comum e em seguida aplicar a lei de anulamento do produto teremos:

$$x^3+x^2-6x=0\Leftrightarrow x(x^2+x-6)=0\Leftrightarrow x(x^2+x-6)=0$$
$$\Leftrightarrow x(x+3)(x-2)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0\vee x+3=0\vee x-2=0$$
$$\Leftrightarrow x_1=0\vee x_2=-3\vee x_3=2$$
$$x_1+x_2+x_3=0+(-3)+2=-1\Rightarrow S=-1$$

7. Resposta:

Considere o sistema de duas equações lineares a duas incógnitas x e y: $\begin{cases}x+y=3\\x-y=1\end{cases}$; pretende se calcular o determinante principal Δ; que se calcula da seguinte maneira:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}\Leftrightarrow \Delta=1\times(-1)-1\times 1\Leftrightarrow \Delta=-1-1\Leftrightarrow \Delta=-2$$

8. Resposta:

Considere a equação $3^{2x+1}-1=8$, essa equação é uma equação exponencial, vamos resolve – la
analiticamente, assim:
Aplicando o princípio da equivalência da adição teremos:

$$3^{2x+1}-1=8\Leftrightarrow 3^{2x+1}-1+1=8+1\Leftrightarrow 3^{2x+1}=9\Leftrightarrow 3^{2x+1}=3^2 ,$$

$f(x)=3^{2x+1}\wedge g(x)=3^2$. A primeira função é injectiva em IR, pois o gráfico de *f(x)* intersecta o gráfico da função *g(x)* em $2x+1=2.$

$$2x+1=2.\Leftrightarrow 2x=2-1\Leftrightarrow 2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}\therefore S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Razões trigonométricas de alguns arcos

x	0	30	45	60	90
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tag	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0
ctg	ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	ND

Fórmula fundamental da trigonometria

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$$

Outras relações trigonométricas

$$tg(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$ctg(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Módulo ou valor absoluto de um número real

Chama – se módulo ou valor absoluto de um número real x ao próprio nómero se este for não negativo ou ao seu simétrico se este for negativo.

$$|x|=\begin{cases}x, se\, x\geq 0\\-x, se\, x<0\end{cases}$$

Equação modular: é toda equação que por meio de princípios de equivalência é redutível a forma:

$$|x|=a$$

A solução da equação acima segue:

$$|x|=a\Leftrightarrow x=a\vee x=-a$$

Factorial de um número natural
O factorial de um número natural n é dado por:

$$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times 1$$

Exemplo:

$$5!=5\times 4\times 3\times 2\times 1$$
$$5!=120$$

Permutação

A permutacao de n elementos tomados p a p, é dado por:

$P_n = n!$ ou

$P_n = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 1$

$n \equiv p$

Exemplo:

$p_4 = 4\times 3\times 2\times 1$

$p_4 = 24$

Aranjos Simples

Aranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!},\ n>p$$

Exemplo:

$$A_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} \Leftrightarrow A_2^4 = \frac{4!}{2!}$$

$$A_2^4 = \frac{4\times 3\times 2!}{2!} \Leftrightarrow A_2^4 = 12$$

Combinação simples

Combinação simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)!\times p!},\ n>p$$

Exemplo:

$$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{4!}{2!\times 2!}$$

$$C_2^4 = \frac{4\times 3\times 2!}{2\times 1\times 2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{12}{2}$$

$$C_2^4 = 6$$

Binómio de Newton

Binómio de Newton é uma expressão que envolve combinação simples, essa expressão é usada para desenvolver os polinómios que aparecem sob forma de binómios potenciais

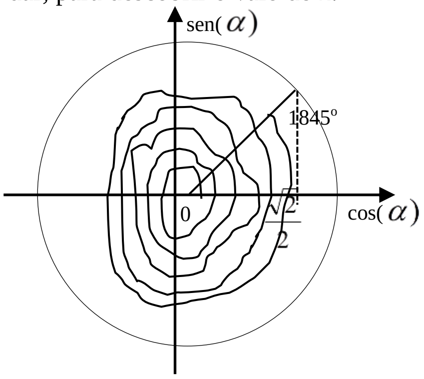
$$(x+y)^n = C_0^n x^n + \ldots + C_n^n y^n$$

Definição clássica de Probabilidade

Se os acontecimentos elemntares forem equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimnto e o

9. Pergunta se qual é o valor de $\cos(1845^o)$?

Resposta: Seja $\alpha = 1845^o$, não sabemos em que quadrante pertence o ângulo $\alpha = 1845^o$, vamos representar no círculo trigonométrico, para ver quantas voltas havemos de dar, para descobrir o valo de k:



Repara que, foram necessários 5 vol quadrante do ângulo 1845°, dai que e coincide com um dos ângulo a quadrante , 45°, portanto:

$$\cos(1845^o) = +\cos(1845^o - 5\times 360^0)$$

$$\cos(1845^o) = +\cos(1845^o - 1800^o) =$$

$$\cos(1845^o) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

10. Resposta:

Sendo $0<\alpha<90^o$, isto é, α é do primeiro quadrante, portanto, $\pi-\alpha$, será um arco de segundo quadrante. Vamos mostrar este facto com um exemplo específico: seja

$$\alpha = \frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\in IQ \Rightarrow \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi-\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi;\ \frac{2}{3}\pi \in IIQ$$

11. Resposta:

Sendo n, o numero par, $\sqrt[n]{(x-5)^n}$ =?

Seja $\sqrt[n]{(x-5)^n} = a$

$\sqrt[\cancel{n}]{(x-5)^{\cancel{n}}} = a \Leftrightarrow a = |x-5|$.

12. Resposta:

Considere a equação modular $|x-2| = 8$, vamos determinar as suas raízes analiticamente e depois somar as mesmas, assim,

$$|x-2| = 8 \Rightarrow x-2 = 8 \vee x-2 = -8 \vee x = 8+2 \vee x = -8+2 \Leftrightarrow x_1 = 10 \vee x_2 = -6$$

A soma de $x_1\ e\ x_2$ $\Rightarrow S = x_1 + x_2 \Rightarrow S = 10+(-6) \Leftrightarrow S = 10-6 \Leftrightarrow S = 4$

13. Resposta:

O desenvolvimento de $(x+3)^6$ tem 6+1 termos que é igual a 7 termos.

14. Resposta:

Considerando **U**, como conjunto universal, a cada um dos agrupamentos que podemos formar, com todos elementos de U, diferindo apenas pela posição, da se o nome de **permutação, porque o numero de elementos agrupados é igual a numero total de elementos do conjunto universal.**

15. Resposta:

Este problema pode ser resolvido aplicando a fórmula de combinação de n elementos agrupados p a p, visto que existem 5 elementos que podem ser escolhido dois a dois e a ordem aqui não é relevante, assim,

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)!\times p!} \underset{n=5\wedge p=2}{\Rightarrow} C_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!\times 2!} \Leftrightarrow C_2^5 = \frac{5\times 4\times 3!}{3!\times 2!} = \frac{5\times 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

são 10 maneiras possíveis.

número de casos possíveis.

$P(A)=\frac{n(C.F)}{n(C.P)}$, $n(CF)\geq n(CP)$

Limite de uma sucessão
Sucessão convergente

Diz – se que uma sucessão (a_n) converge para um número real L (escreve – se $\lim a_n = L$)

Se, por muito pequeno que seja o número positivo δ se existir uma ordem ***p*** a apartir da qual se tem

$|a_n - L| < \delta$, isto é, $|a_n - L|$ torna tão pequena quando se queira.

Progressão aritmética (PA)

Uma sucessão (a_n) é uma progressão aritmética (P.A) se existe um número real r, tal que

$$a_{n+1} - a_n = r, \forall n \in IN$$

Ao número *r* chama – se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.A:

$$a_n = a_1 + (n-1)\times r$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão aritmética é dada por:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\times r}{2}\times n$$

Progressão geométrica (PG)

Uma sucessão (a_n) é uma progressãogeotmética (P.G) se existeum número real r, tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \forall n \in IN$

Ao número *r* chama – se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.G:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão geométrica é dada por:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

Algumas operações com infinitos

$k\times\infty=\infty$

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

16. Resposta:

Para resolver este problema, vamos aplicar a fórmula: $P(M)+P(\overline{M})=1$ dado que $P(M)=0.4$ então $P(\overline{M})+0.4=1 \Leftrightarrow P(\overline{M})=1-0.4 \Leftrightarrow P(\overline{M})=0.6$

17. Resposta:

Dada uma sucessão de termo geral a_n, diz se infinitamente pequena se e somente se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

18. Resposta:

O limite dado, é um limite do caso notável, conhecido por limite Neperiano, ele muita das vezes é usado para levantar outros casos notáveis, o seu valor é um numero irracional que segue: $\lim\limits_{n\to\infty} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182818285..... \to$ constante de Euler.

19. Resposta:

Considere a soma: $3+4+5+...+a_n = 75$, vamos determinar o valor de n, ou seja quantos termos dessa sucessão foram somados para que o resultado seja 75?

Seja $a_1 = 3;\ a_2 = 4;\ a_3 = 5 \wedge S_n = 75$,

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = 1 \Rightarrow r = 1$ a sucessão dada é uma progressão aritmética (PA) de razão 1 e primeiro termo igual a 3. A soma de n termos de uma P.A é dado por:

$$S_n = n\times\frac{a_1+a_n}{2} \Rightarrow 75 = n\times\frac{3+[3+(n-1)\times 1]}{2} \Leftrightarrow n\times\frac{3+3+n-1}{2} = 75 \Leftrightarrow n\times\frac{6+n-1}{2} = 75 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2+5n = 2\times 75 \Leftrightarrow n^2+5n = 150 \Leftrightarrow n^2+5n-150 = 0 \Leftrightarrow (n-10)(n+15) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n-10 = 0 \vee n+15 = 0 \Rightarrow n = 10 \vee n = -15;\ n\in IN \therefore n = 10$$

20. Resposta:

Seja $a_1 = -2; \wedge r = 3$, foi dito que são dados de uma progressão geométrica (PG), portanto, pretende se calcular a soma de 5 termos dessa PG, assim,

A soma de n termos de uma P.G é dado por:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_5 = -2\times\frac{1-3^5}{1-3} \Leftrightarrow S_5 = -2\frac{1-243}{-2} = 1-243 = -242$$

21. Resposta:

Vamos extrair os dados do problema:

A Maria no:

Primeiro dia poupou 50 Meticais, $a_1 = 50$

No segundo dia poupou 100 Meticais, $a_2 = 100$

No terceiro dia poupou 150 Meticais, $a_3 = 150$

…………………………………………………………
…………………………………………………………
…………………………………………………………

No vigésimo dia poupou x meticais , $a_1 = 50$

Fazendo uma analise: $150-100 = 100-50 = 50 \Rightarrow r = 50 \wedge a_1 = 50$ trata se de uma progressão aritmética de razão 50 e primeiro termo 50. Neste caso, pretende se saber qual é o valor que a Maria poupou no vigésimo dia, o seja a_{20} o termo de ordem 20 da sucessão. Vamos determinar o termo geral da PA, assim,

$$a_n = a_1 + (n-1)\times 50 \Rightarrow a_n = 50+(n-1)\times 50 \Leftrightarrow a_n = 50+50n-50 \Leftrightarrow a_n = 50n-50$$

$$\Leftrightarrow a_n = 50n;\ n = 20 \Rightarrow a_{20} = 50\times 20 \Leftrightarrow a_{20} = 1000Mt$$

A Maria no vigésimo dia poupou 1000Mt.

22. Consideremos a figura que representa uma função real de variável real:

$\infty^k = \infty$

$\infty \times \infty = \infty$

$k + \infty = \infty$

$k - \infty = -\infty$

$\frac{\infty}{k} = \infty$

$\frac{k}{\infty} = 0$

Limite de uma função real de variável real

Dada uma função *f(x)* definida no domínio D_f, *a*, *L* são números reais. Diz – se, *L* é o limite da função *f(x)* quando *x* tende para *a* (*a* não necessariamente pertecente ao domínio de *f(x)*) sse:

$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

e escreve – se $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Conheça alguns limites notáveis

- **Limites Neperianos**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^k$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^p} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$$

- **Limites trigonométricass**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Continuidade de funções reais de variáveis reais

Uma função real de variàvel real é contínua num ponto de abcissa $x = a$ sse,

$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Se existir a diferença entre os mmbros dessa igualdade, a função é

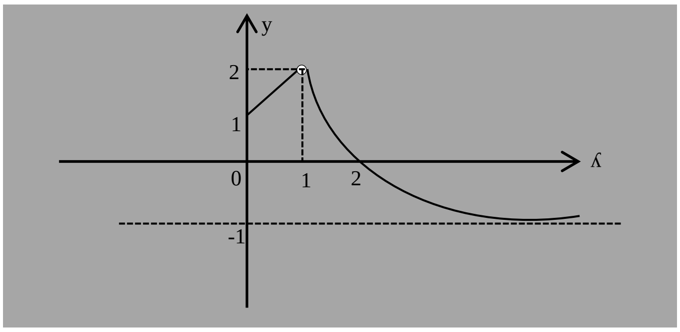


Figura: 22.1- gráfico de função real de variável real definido por 2 troços.

Com base nesta figura acima, o domínio da função é o conjunto de números reais não negativos exceptuando o 1, assim, $D = IR_0^+ \setminus \{1\}$, pois a função não tem sentido em x=1.

23. Resposta:

Observando o gráfico do número 22, pode se concluir que o contradomínio da função é um intervalo de extremos abertos $D'f =]-1;2[$

24. Resposta:

A função dada é positiva no intervalo: $[0;2[\setminus \{1\}$

25. Resposta:

A equação da assímptota é dada por: $y = -1$

26. Resposta:

Dada a função real de variável real definida por: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, \text{ quando } x \geq 0 \\ -x - 1, \text{quando } x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} x^2 + 1 = 1 \\ \lim_{x\to 0^-} -x - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) \therefore$$

não existe o limite da função *f*. Visto que os limites laterais são diferentes.

27. Resposta:

Uma função real de variável real diz se continua num ponto de abcissa *x=a* se e somente se o valor de limite da função f é igual ao valor da função neste ponto, assim escreve se:

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

28. Resposta:

Vamos determinar o valor do limite: $\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x}$;

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x} = \frac{3+3}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

29. Resposta:

Vamos determinar o valor do limite: $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$;

$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} = \frac{2^3-8}{2-2} = \frac{8-8}{0} = \left[\frac{0}{0}\right]$ este resultado não é um numero real, chama se indeterminação, vamos levantar essa indeterminação rescrevendo o limite:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2^3}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+2^2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4) = 2^2 + 2\times 2 + 4 = 12$$

O valor do limite dado é igual a 12.

descontinua no ponto de abcissa *a*

Cálculo diferencial

- **Definição da derivada de uma função**

Dada uma função *F(x)* definida no domínio D_F, sendo *a* abcissa de um ponto P, tal que $a \in D_F$. A derivada da função *F(x)* no ponto P é dada pela expressão:

$$F'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{a-h} \quad \text{ou}$$

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x-h}=f(x)$$

A função *f(x)* chama – se a primeira derivada.

Regras de derivação imediata

Função constante
$f(x)=k \Rightarrow f'(x)=0$

Função potência
$f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$

Função polinomial
Função composta
$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n \Rightarrow$
$f'(x)=(a_0x^n)'+(a_1x^{n-1})'+...+(a_n)'$

Derivada da soma
$f(x)=u\pm v \Rightarrow f'(x)=u'\pm v'$

Função afim
$f(x)=ax+b \Rightarrow f'(x)=a$

Função produto
$f(x)=u\times v \Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$

Função quociente
$f(x)=\frac{u}{v} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Função composta
$f(x)=u^n \Rightarrow f'(x)=nu^{n-1}u'$

Derivada da função exponêncial

Função exponêncial de base *e*
$f(x)=e^u \Rightarrow f'(x)=u'e^u$

Função exponêncial de base *a*
$f(x)=a^u \Rightarrow f'(x)=u'a^u\ln(a)$

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

30. Resposta:

Vamos determinar o valor do limite: $\lim_{x\to 0}(1+sen(2x))^{\frac{1}{x}}$; **o limite dado é um limite trigonométrico, envolvendo o limite notável Neperiano, vamos substituir a variável x pela respectiva tendência, assim:**

$\lim_{x\to 0}(1+sen(2x))^{\frac{1}{x}}=(1+sen(2\times 0))^{\frac{1}{0}}=(1+0)^{\infty}=[1^{\infty}]$ .Este resultado não **é um numero real, chama se indeterminação, vamos levantar essa indeterminação:**

$$\lim_{x\to 0}(1+sen(2x))^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2xsen(2x)}{2x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+2x\times\frac{sen(2x)}{2x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$$

vamos trocar a variável x para varia y fazendo , $y=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{y}$; $se\, x\to 0\Rightarrow y\to\frac{1}{0}\Rightarrow y\to\infty$ neste caso o limite fica:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+2\times\frac{1}{y}\right)^y=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^y=e^2;$$

31. Resposta:

Sendo $f(x)=x-x^2$, o cálculo da primeira derivada no ponto de abcissa $x=2$ segue:

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\Leftrightarrow f'(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x-x^2-(2-2^2)}{x-2}\Leftrightarrow f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{x-x^2+2}{x-2}$$

32. Resposta:

Sendo $f(x)=2x^3+x^2+1$, o cálculo da segunda derivada da função *f* segue:
Vamos começar por calcular a primeira derivada em IR, assim,

$$f'(x)=(2x^3+x^2+1)'\Leftrightarrow f'(x)=(2x^3)'+(x^2)'+1'\Leftrightarrow f'(x)=3\times 2x^2+2x+0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f'(x)=6x^2+2x$$

Uma vez encontrada a primeira derivada, vamos determinar a segunda derivada a partir da primeira derivada,

$$f''(x)=(6x^2+2x)'\Leftrightarrow f''(x)=(6x^2)'+(2x)'\Leftrightarrow f''(x)=6\times 2x+1\times 2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f''(x)=12x+2$$

A segunda derivada da função f é igual a $f''(x)=12x+2$

33. Consideremos a figura que representa uma função real de varável real:

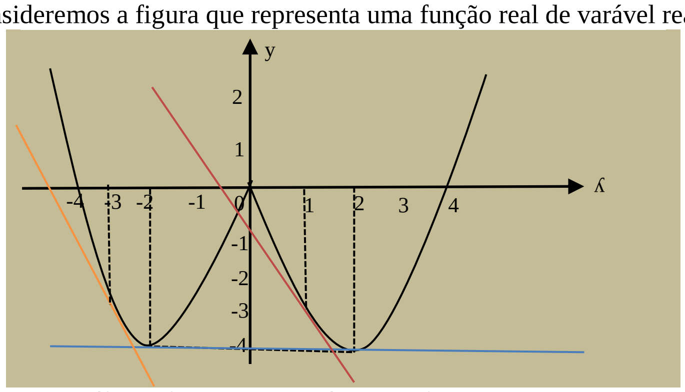


Figura: 33.1- gráfico de função real de variável real definido por 1 troços.

Derivada da função logarítmica
Função logarítmica de base *e*

$$f(x)=\ln(u)\Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'}{u}$$

Função logarítmica de base *a*

$$f(x)=\log_a(a)\Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{u'}{u\ln(a)}$$

Derivada da função trigonométrica
Função seno

$$f(x)=sen(x)\Rightarrow \quad f'(x)=\cos(x)$$

$$f(x)=sen(u)\Rightarrow \quad f'(x)=u'\cos(u)$$

Função co-seno

$$f(x)=\cos(x)\Rightarrow \quad f'(x)=-sen(x)$$

$$f(x)=\cos(u)\Rightarrow \quad f'(x)=-u'sen(u)$$

Intervalos de monotonia e primeira derivada de uma função

Teorema

Seja *f* uma função contínua em $[a,b]$ e derivavel em]a, b[.

- Se $f'(x)>0$ para todo $x\in\,]a,b[$, então *f* é estritamente crescente em $[a,b]$
- Se $f'(x)<0$ para todo $x\in\,]a,b[$, então *f* é estritamente decrescente em $[a,b]$

Máximos e mínimos absolutos e primeira derivada de uma função

Teorema

Seja *f* uma função contínua em $[a,b]$ e tem um máximo ou um mínimo em *c* do intervalo $]a,b[$, então $f'(c)=0$ ou $f'(c)$ não existe.

Um elemento *c* do domínio de uma função *f* é um ponto crítico de *f* se então $f'(c)=0$ ou $f'(c)$ não existe.

Álgebra
Polinómios

É uma soma de monómios não semelhantes

Um polinómio de uma variável tem a seguinte fórmula geral:

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$$

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

Duma forma geral, uma função real de variável real não é derivável nos pontos de abcissas onde há vértices, e nem em pontos onde a função não é definida, visto que não se pode traçar recta tangentes nestes pontos, neste caso específico, a função *f*, não é derivável no ponto de abcissa *x=0* e ordenada *y=0*, ou seja no ponto (0;0).

34. Resposta:

Vamos traçar as rectas tangentes nos pontos (-2;-4) e (2;-4), como mostra a figura 33.1. Repare que a recta traçada é paralela ao eixo das abcissas e o coeficiente angular da recta traçada é nula, logo a primeira derivada da função tem a primeira derivada nula (-2;-4) e (2;-4).

35. Resposta:

A função *f* tem a primeira derivada negativo intervalo onde ela é monótona decrescente, a variação da função (monotonia) anterior segue:

x	$]-\infty;-2[$	-2	$]-2;0[$	0	$]0;2[$	2	$]2;+\infty[$
$f(x)$	↘	-4	↗	0	↘	-4	↗

A função *f(x)* é monótona decrescente em $]-\infty;-2[\cup]0;2[$, neste intervalo a função admite a primeira derivada negativa (como teste, trace uma recta tangente no qualquer ponto de abcissa que pertence neste intervalo).

- **<u>Somente para Secção de Letras</u>**

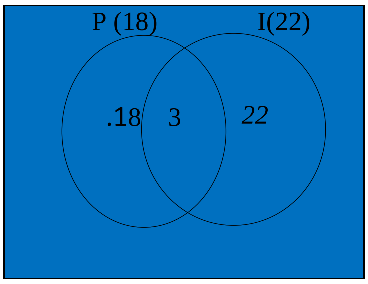
36. Resposta:

Consideremos o conjunto definido por compressão

$$M=\{x: x \text{ e uma letra da palavra Matematica}\}$$

Definindo por extensão o conjunto M, tem se: $M=\{m;a\ t;e;i\ c\}$

37. Resposta ao problema:



n(U)=40

$$n(I)=22$$
$$\Rightarrow n(I)+n(P\cap I)=x$$
$$\Leftrightarrow 22+3=x$$
$$x=25$$

São 25 pessoas que falam inglês.

38. Resposta:

O gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo das ordenadas.

39. Resposta:

Vamos fazer o estudo da variação da função $f(x)=x^3-3x$, em primeiro lugar, vamos calcular a primeira derivada da função *f*, assim,

$$f'(x)=(x^3-3x)'\Leftrightarrow f'(x)=(x^3)'-(3x)'$$

$f'(x)=3x^2-3$, Vamos determinar os zeros da função da primeira derivada: $f'(x)=0$

Onde

$a_0,\ a_1, a_2, \ldots, a_n \in IR \wedge n \in IN$

Regra de Ruffin

É uma regra que é usada para determinar o quociente entre o polinómio de grau *n* e um binómio línear *x* - *a*.

Teoria de Conjunto

Conjunto é uma colecção de objectos da mesma espécie.

Operações sobre conjutos

Reunião de conjuntos
Intersecção de conjuntos
Diferença de conjuntos
Complementar de conjuntos

Geometria analítica

Dado um ponto P(x_0, y_0) e recta r: $Ax + Bx + C = 0$ no plano, a distância entre o ponto P e a recta *r* representada por d(P, r) é dada por:

$$d(P,r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Função homográfica

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, com\ cx + d \neq 0$$

Números complexos

Para responder o número 38 é preciso ter conhecimentos profundo de números complexos conjugados

Números complexos conjugados

Dois números complexos dizem – se conjugados quando tem partes reais iguais e partes imaginárias simétricas. O onjugado de número complexo z representa – se por $\bar{z}$

Exemplo:

$3 + 4i \wedge 3 - 4i$ são dois números complexos conjugados.

Prmitiva de uma função

As regras de primitivação de funções obtém – se através das regras de derivação, assim temos:

$\int(k)dx = kx + c$

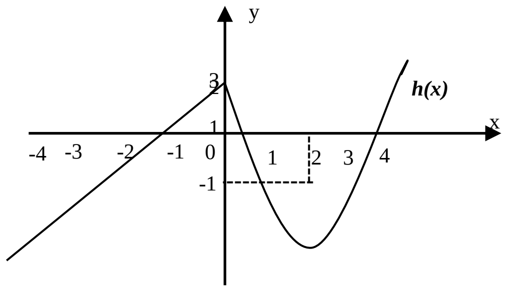
Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

$$3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{3}{3} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x_1 = -1 \vee x_2 = 1$$

x	$]-\infty;-1[$	-1	$]-1;1[$	1	$]1;+\infty[$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	3	↘	-2	↗

A função $f(x) = x^3 - 3x$ é monótona decrescente se $x \in]-1;1[$

40. Resposta: considere o gráfico da função *h(x)* :



A função é definida por dois trocos, a expressão analítica do primeiro troço $x \in]-\infty;0[$ é

$$h(x) = x + 3 \Rightarrow h'(-2) = \lim_{x\to-2}\frac{h(x)-h(2)}{x-(-2)} = \lim_{x\to-2}\frac{x+3-(-2+3)}{x+2} = \lim_{x\to-2}\frac{x+3-1}{x+2} = \lim_{x\to-2}\frac{x+2}{x+2} =$$

$$= \lim_{x\to-2} 1 = 1 \therefore h'(-2) = 1$$

- **<u>Somente para a Secção de Ciências</u>**

36. Resposta:

Se o primeiro ponto é origem do S.C.O, então tem as seguintes coordenadas: O(0;0) e outro ponto dado é P(-2;-7). A distância entre dois pontos no plano é dada pela fórmula:

$$d(P_0;P) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \Rightarrow d(O;P) = \sqrt{(-2-0)^2 + (-7-0)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d(O;P) = \sqrt{(-2)^2 + (-7)^2} \Leftrightarrow d(O;P) = \sqrt{4+49} \Rightarrow d(O;P) = \sqrt{53}$$

37. Resposta:

Dados os pontos $P(0;1); Q(3;4) \wedge R(2k;k)$ para que estes três pontos sejam colineares devem pertencer a uma mesma recta.

Vamos determinar uma equação da recta que passa pelos pontos P e Q, $y = mx + b$

$$m = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{4-1}{3-0} \Leftrightarrow m = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = 1(x - 0)$$

$$y = x + 1 \to x = 2k \wedge y = k \Rightarrow k = 2k + 1 \Leftrightarrow k - 2k = 1 \Leftrightarrow -k = 1 \Rightarrow k = -1$$

Para que os três pontos sejam colineares, o valor de *k* deve ser igual a -1

38. Resposta:

Dada a função $f(x) = \dfrac{2-x}{x}$ vamos determinar a sua inversa, portanto, uma função real de variável real admite inversa num dado intervalo ou no seu domínio se e somente se ela

$\int (ku)dx = k\int xdx$

$\int u^n u'\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

$\int (u \pm v)dx = \int udx + \int vdx$

$\int \frac{u'}{u}dx = \ln|u| + C$

$\int e^u u'\,dx = e^u + c$

$\int a^u u'\,dx = \frac{a^u}{\ln(a)} + C$

$\int \sin xdx = -\cos x + C$

$\int \cos xdx = \sin x + C$

Integração por parte

$\int uv'\,dx = uv - \int u'vdx$

Função Modular

Para responder o número 40 é preciso ter conhecimentos profundo de tipos de funções modulares

Tipos de funções modulares

Função modular do tipo $y = f(|x|)$

Função modular do tipo $y = |f(x)|$

Função modular do tipo $y = |f(|x|)|$

for injectiva neste mesmo intervalo ou no seu todo domínio. A função f é homográfica e em geral as funções homográficas são injectivas em todo seu domínio, logo f admite inversa em $IR \setminus \{0\}$ logo,

$$f(x) = \frac{2-x}{x} \Rightarrow x = \frac{2-f(x)}{f(x)} \Leftrightarrow x \times f(x) = 2 - f(x) \Leftrightarrow x \times f(x) + f(x) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)[x+1] = 2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{x+1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2}{x+1}$$

39. Resposta:

Considerando a função $f(x) = x^2$ cujo $D_f = [-2;2] \Rightarrow D'f = [0;4]$

Consideremos a função $y = 2f(x)$, o contradomínio dessa função é $D'_y = [2\times 0; 2\times 4] = [0;8]$

Já o gráfico o gráfico de $g(x) = 2f(x) + 3$, é obtido a partir do gráfico da função $y = 2f(x)$, onde cada valor da ordenada será adicionada 3 unidades e o contradomínio passa ser: $D'_g = [0+3; 8+3]$

$$D'_g = [3;11]$$

40.Resposta:

O número $3+\sqrt{-25}$, pode ser representado da seguinte maneira:

$$3+\sqrt{-25} = 3+\sqrt{-1\times 25} = 3+\sqrt{-1}\times\sqrt{25} = 3+\sqrt{25}\times\sqrt{-1} = 3+5\sqrt{-1} = 3+5i$$

FIM

Resolução de Exame de Matemática – 12ª. Classe
Ano: 2018/ 2ª Época

❖ **Operações sobre proposições lógicas**

Na lógica matemática estdaa – se as seguintes operações sobre proposições:

Negação de uma proposição
Conjuncão de proposições
Disjunção de proposições
Implicação material
Equivalência materail

Expressão algebrica
Uma expressão algebrica diz – se quando a variável aparece sob forma de um radicando.
Repare qu a expressão do número 3, a variável aparece dentro do radical com índice 3, e a varável aparece também sob forma de denominador, visto que não existem um número real que pode anular o denominador, razão pelo qual todo número real define a expressão dada.

Equação
Já foi dito que uma equação é a comparação de duas expressões designatórias por meio de símbolo de igualdade.

Equação exponêcial: é toda equação em que a incógnita aparece sob forma de um expoente de base *a*, sendo *a* positivo e diferente de unidade.

A representação da forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ chama – se determinante proviniente de uma matriz de 3 por 3

Exame de Matemática – 12ª classe, Ano: 2018/ 2ª Época

Resoluções

1. **Resposta:**
Vamos fazer a representação simbólica da seguinte proposição ”***O quadrado de todo numero real não é negativo***”
Antes de representar simbolicamente a proposição destacada, veja que nela está presente um quantificador universal “todo”, na lógica matemática o símbolo deste quantificador é $\forall$ e representemos o numero real por *x*, sendo assim teremos: $\forall_{x\in IR} : x^2 \geq 0$

2. **Resposta:**
Vamos representar a expressão equivalente de $p \wedge (p \wedge \sim q)$ aplicando as propriedades das operações sobre as proposições lógicas, assim:
$$p \wedge (p \wedge \sim q) \Leftrightarrow (p \wedge p) \wedge \sim p \rightarrow \text{associatividade}$$
$$\Leftrightarrow p \wedge \sim q \rightarrow \text{reflexiva na } \wedge$$

3. **Resposta:**
Aqui pretende se escolher uma igualdade verdadeira, porem a escolha não deve ser feito de uma forma arbitrária, deve ser feita de uma forma sistemática, assim,

A. $(x-1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x-1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x-1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)(x-1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)(x-1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Repare que este resultado não é verdadeiro. Vamos analisar a opção B:

B. $(x-1)^3 = x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x-1) = x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x-1) = x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)(x-1) = x^3 + 3x^2 - 3x + 1$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)(x-1) = x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1 = x^3 + 3x^2 - 3x + 1$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 + 3x^2 - 3x + 1$$

Repare que este resultado não é verdadeiro. Vamos analisar a opção C:

C. $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow (x+1)(x+1)(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+1)(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1)(x-1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$
$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1)(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$
$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

A opção C é verdadeira, já não podemos verificar a opção D, visto que das quatros alternativas, existe uma alternativa apenas correcta.

4. **Resposta:**
Uma expressão diz se algébrica racional inteira à toda expressão polinomial. Das alternativas apresentada, a que apresenta expressão algébrica racional inteira
$$\frac{x-12}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{3} - \frac{12}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{3} - 4$$

5. **Resposta:**

Razões trigonométricas de alguns arcos

x	0	30	45	60	90
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tag	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0
ctg	ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	ND

Fórmula fundamental da trigonometria

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$$

Outras relações trigonométricas

$$tg(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$ctg(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Módulo ou valor absoluto de um número real

Chama – se módulo ou valor absoluto de um número real x ao próprio nómero se este for não negativo ou ao seu simétrico se este for negativo.

$$|x|=\begin{cases} x, \text{se } x\geq 0 \\ -x, \text{se } x<0 \end{cases}$$

: é toda equação que por meio de princípios de equivalência é redutível a forma:

$$|x|=a$$

A solução da equação acima segue:

$$|x|=a \Leftrightarrow x=a \vee x=-a$$

O factorial de um número natural n é dado por:

$$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 1$$

$$5!=5\times 4\times 3\times 2\times 1$$
$$5!=120$$

Permutação

A permutacao de n elementos

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

Vamos determinar o domínio de existência da expressão $\sqrt[5]{x+1}$

A expressão dada é algébrica irracional, visto que a variável aparece sob forma de radical, mas temos que analisar o índice do radical da expressão, assim:

i) Se o índice do radical for um número par, então o radicando não deve ser negativo;

ii) Se o índice do radical for um número impar, então o radicando pode ser qualquer número real;

O índice do radical da expressão dada, é igual a 5, logo $D=IR$

6. Resposta:

Considere a equação $x^3-4x=0$, como podemos ver, essa é uma equação do terceiro grau, pretendemos resolve – la analiticamente e depois determinar a soma das suas raízes reais:

$$x^3-4x=0 \Leftrightarrow x(x^2-4)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^2-4=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^2=4 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm\sqrt{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm 2 \Rightarrow x_1=-2 \vee x_2=0 \vee x_3=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow S=x_1+x_2+x_3 \Leftrightarrow S=-2+0+2=0$$

7. Resposta:

Considere a equação $x^4-2x^2+1=0$, como podemos ver, essa é uma equação do quarto grau e biquadrática, pretendemos encontrar as suas raízes reais analiticamente:

$$x^4-2x^2+1=0 \Leftrightarrow x^{2\times 2}-2x+1=0 \Leftrightarrow (x^2)^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-1=0 \vee x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \vee x^2=1 \Leftrightarrow x^2=\pm\sqrt{1} \vee x^2=\pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x=\pm 1 \vee x=\pm 1$$

$$\Leftrightarrow x_1-1 \vee x_2=-1 \vee x_3=1 \vee x_4=1 \Rightarrow S=\{-1;1\} \Leftrightarrow S=\{\pm 1\}$$

8. Resposta:

De um sistema linear de 3 equações e três incógnitas $(x;y;z)$ sabe se que $\Delta=-7;\ \Delta_x=7;\ \Delta_y=-28;\ \Delta_z=14$ o pedido é determinar a soma: $S=x+y+z$

Sabes que $x=\frac{\Delta_x}{\Delta};\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta};\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$ portanto,

$$S=x+y+z=\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}+\frac{\Delta_y}{\Delta}+\frac{\Delta_z}{\Delta}\right)$$

$$S=x+y+z=\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}+\frac{\Delta_y}{\Delta}+\frac{\Delta_z}{\Delta}\right) \Leftrightarrow S=\frac{7}{-7}+\frac{-28}{-7}+\frac{14}{-7} \Leftrightarrow S=-1+4+(-2)=3+(-2)$$

$$S=1$$

9. Resposta:

Aqui pretendemos escolher uma opção **NÃO** verdadeira, mas essa escolha, não deve ser feita de uma forma arbitrária, mas sim sistemática:

A. $tg(90^o)=\infty \Leftrightarrow \dfrac{sen(90^o)}{\cos(90^o)}=\infty \Leftrightarrow \dfrac{1}{0}=\infty$ Opção verdadeira;

B. $sen(0^o)=1 \Leftrightarrow 0=1$ Opção **NÃO** verdadeira, logo a resposta não verdadeira é B.

10. Resposta:

Qual é o valor de $tg(1845^o)$?

O arco 1845^o é do primeiro quadrante e no primeiro quadrante tangente é positiva,

$$tg(1845^o)=tg(1845^0-5\times 360^o)=tg(1845^o-1800^o)=tg(45^o)=1$$

11. Resposta:

A condição para que $|-2x+1|=2x-1$ .Pela definição do módulo de um número real tomados *p* a *p*, é dado por:

$P_n = n!$ ou

$P_n = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 1$

$n \equiv p$

$p_4 = 4\times 3\times 2\times 1$

$p_4 = 24$

Aranjos Simples

Aranjos simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!},\ n>p$$

Exemplo:

$$A_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} \Leftrightarrow A_2^4 = \frac{4!}{2!}$$

$$A_2^4 = \frac{4\times 3\times 2!}{2!} \Leftrightarrow A_2^4 = 12$$

Combinação simples

Combinação simples de n elementos tomados p a p é dado por:

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)!\times p!},\ n>p$$

$$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{4!}{2!\times 2!}$$

$$C_2^4 = \frac{4\times 3\times 2!}{2\times 1\times 2!} \Leftrightarrow C_2^4 = \frac{12}{2}$$

$$C_2^4 = 6$$

Binómio de Newton

Binómio de Newton é uma expressão que envolve combinação simples, essa expressão é usada para desenvolver os polinómios que aparecem sob forma de binómios potenciais

$$(x+y)^n = C_0^n x^n + \ldots + C_n^n y^n$$

Probabilidade

Se os acontecimentos elemntares forem equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento A é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimnto e o número de casos possíveis.

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

temos: $|-2x+1| = \begin{cases} -2x+1, & se\ -2x+1\geq 0 \\ -(-2x+1), & se -2x+1<0 \end{cases}$

$$2x-1\geq 0 \Leftrightarrow 2x\leq 1 \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{2}$$

12. Resposta:

Vamos determinar as raízes da equação modular $|6x-1| = 17$

$$|6x-1| = 17 \Leftrightarrow 6x-1=17 \vee 6x-1=-17 \Leftrightarrow 6x=17+1 \vee 6x=-17+1 \Leftrightarrow 6x=18 \vee 6x=-16$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{18}{6} \vee x=\frac{-16}{6} \Leftrightarrow x_1=3 \vee x_2=-\frac{8}{3}$$

$$P = x_1\times x_2 \Leftrightarrow P = 3\times\left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{24}{3} = -8$$

13. Resposta:

O desenvolvimento de $(2x+3)^{10}$ tem 10+1 termos que são 11 termos

14. Resposta:

Considerando *U* com *n* elementos. A cada um dos agrupamentos com *p* elementos, tal que p <n, que diferem pela ordem de colocação ou pela natureza de pelo menos um elemento damos o nome de ***arranjos***.

15. Resposta:

Se na empresa há 7 trabalhadores e pretende se criar grupo de 3 trabalhadores, aqui esta bem claro que a ordem não interessa e pode se aplicar a fórmula da combinação para resolver este problema, por outro lado o número total de elementos é diferente em relação ao número de elementos no grupo.

$$C_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!\times 3!} = \frac{7\times 6\times 5\times 4!}{4!\times 3!} = 35$$

16. Resposta:

$$n(S)=10;\ n(\bar{C})=4 \Rightarrow P(\bar{C}) = \frac{n(\bar{C})}{n(S)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

17. Resposta:

Uma sucessão a_n tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ diz se que é divergente.

18. Resposta:

O valor de $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é igual ao número de *Nepier* que é um número irracional ***e***.

19. Resposta:

Se se $a_1 = -36;\ a_n = 209$ e $S_n = 4325$ e trata se de uma PA, então:

$$S_n = n\times\frac{a_1+a_n}{2} \Rightarrow 4325 = n\times\frac{-36+209}{2} \Leftrightarrow 4325 = n\times\frac{173}{2} \Leftrightarrow 2\times 4325 = 173n$$

$$\Leftrightarrow 173n = 8650 \Leftrightarrow n = \frac{8650}{173} \Rightarrow n = 50$$

Foram somados 50 termos da sucessão

20. Resposta:

Dado que $a_1\times a_3 = 81;$ e o valor de a_2

$$P(A)=\frac{n(C.F)}{n(C.P)},\ n(CF)\geq n(CP)$$

Limite de uma sucessão

Diz – se que uma sucessão (a_n) converge para um número real L (escreve – se $\lim a_n = L$)

Se, por muito pequeno que seja o número positivo δ se existir uma ordem ***p*** a apartir da qual se tem

$|a_n - L| < \delta$, isto é, $|a_n - L|$ torna tão pequena quando se queira.

Uma sucessão (a_n) é uma progressão aritmética (P.A) se existe um númeroreal r, tal que $a_{n+1} - a_n = r, \forall n \in IN$

Ao número *r* chama – se diferença da progressão aritmética.

ermo geral de P.A:

$$a_n = a_1 + (n-1)\times r$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão aritmética é dada por:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\times r}{2}\times n$$

Progressão geométrica (PG)

Uma sucessão (a_n) é uma progressãogeotmética (P.G) se existeum número real r, tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \forall n \in IN$$

Ao número *r* chama – se diferença da progressão aritmética.

Termo geral de P.G:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

A soma de n termos consecutivo de uma progressão geomética é dada por:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

Algumas operações

$k \times \infty = \infty$

$\infty^k = \infty$

Ministério da Educação e Desenvolvimento Humano

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} \Leftrightarrow a_1 \times a_3 = a_2 \times a_2 \Leftrightarrow 81 = a_2^2 \Leftrightarrow a_2^2 = 81 \Leftrightarrow a_2 = \pm\sqrt{81} \Leftrightarrow a_2 = \pm 9$$

Trata se de uma PG de termos positivos, logo a solução negativa não serve: $a_2 = 9$

21. Resposta:

Seja $a_1 = 6;\ a_2 = 12;\ a_3 = 24;\ ...\ \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} - q \Leftrightarrow \frac{24}{12} = \frac{12}{6} = 2 \Rightarrow q = 2$

Trata se de uma PG de termos positivos, com razão igual a 2. Vamos aplicar directamente a formula de soma de n termos de PG,

$$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 6\times\frac{1-2^{10}}{1-2} = 6\times\frac{1-1024}{-1} = 6\times\frac{-1023}{-1} = 6\times 1023 = 6138$$

22. Resposta:

Observando o gráfico cuidadosamente, o domínio é $D_f = IR \setminus \{0\}$

23. Resposta:

O contradomínio da função é $D'_f = IR \setminus \{1\}$

24. Resposta:

A função é negativa para $x \in]-1{,}0[$

25. Resposta:

A equação da assimptota horizontal é $y = 1$

26. Resposta:

Observando atentamente o gráfico, concluímos que o valor de $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$

27. Resposta

Uma função real de variável real $y = f(x)$ diz se que é descontinua num ponto de abcissa $x = a$ se o limite dessa função nesse ponto é diferente com o valor da função no ponto $x = a$ simbolicamente fica:

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$$

28. Resposta:

O valor de $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{sen(4x)}{4}$, segue:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{sen(4x)}{4} = \frac{sen(4\times\frac{\pi}{4})}{4} = \frac{sen(\pi)}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

29. Resposta:

Vamos calcular o valor de $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{32x^5 - 6x + 11}}{x-7}$, acompanhe os cálculos com muita

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{32x^5 - 6x + 11}}{x-7} = \frac{\sqrt[5]{32\times\infty^5 - 6\times\infty + 11}}{\infty - 7} = \frac{\sqrt[5]{\infty}}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

atenção: Este não número real.

Vamos levantar essa indeterminação redefinindo o limite:

$\infty \times \infty = \infty$
$k + \infty = \infty$
$k - \infty = -\infty$
$\frac{\infty}{k} = \infty$
$\frac{k}{\infty} = 0$

Limite de uma função real de variável real

Dada uma função *f(x)* definida no domínio D_f, *a*, *L* são números reais. Diz – se, *L* é o limite da função *f(x)* quando *x* tende para *a* (*a* não necessariamente pertecente ao domínio de *f(x)*) sse:
$\forall \varepsilon > 0; \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

e escreve – se $\lim_{x\to a} f(x) = L$

Conheça alguns limites notáveis

- **Limites Neperianos**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^k$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^p} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$$

- **Limites trigonométricass**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Continuidade de funções reais variáveis reais

Uma função real de variàvel real é contínua num ponto de abcissa $x = a$ sse,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Se existir a diferença entre os mmbros dessa igualdade, a função é descontinua no ponto de abcissa *a*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{32x^5-6x+11}}{x-7} = \lim_{x\to\infty}\sqrt[5]{\frac{32x^5-6x+11}{(x-7)^5}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt[5]{\frac{x^5\left(32-\frac{6}{x^4}+\frac{11}{x^5}\right)}{\left(x\left(1-\frac{7}{x}\right)\right)^5}} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[5]{\frac{x^5\left(32-\frac{6}{x^4}+\frac{11}{x^5}\right)}{x^5\left(1-\frac{7}{x}\right)^5}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt[5]{\frac{\left(32-\frac{6}{x^4}+\frac{11}{x^5}\right)}{\left(1-\frac{7}{x}\right)^5}} = \sqrt[5]{\frac{\left(32-\frac{6}{\infty^4}+\frac{11}{\infty^5}\right)}{\left(1-\frac{7}{\infty}\right)^5}} =$$

$$\sqrt[5]{\frac{(32-0+0)}{(1-0)^5}} =$$

$$= \sqrt[5]{\frac{32}{1}} = = \sqrt[5]{32} = 2$$

30. Vamos calcular o valor de $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$, acompanhe os cálculos com muita atenção;

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \frac{\sqrt{2-1}-1}{2-2} = \frac{1-1}{2-2} = \left[\frac{0}{0}\right],$$ Indeterminação. Vamos levantar essa indeterminação

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{\left(\left(\sqrt{x-1}\right)^2-1^2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)} =$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-1-1}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{\left(\sqrt{x-1}+1\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{2-1}+1\right)} =$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{1}+1\right)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

31. Resposta:

A fórmula correcta de cálculo da primeira derivada da função $f(x) = 4x+1$ em x=1 é:

$$f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{4x+1-5}{x-1} \Leftrightarrow f'(1) = \lim_{x\to 1}\frac{4x-4}{x-1}$$

32. Resposta:

Dada a função $f(x) = x^5 + 2x^3 + x$, vamos calcular a segunda derivada da função, vamos a isso caro leitor:

Cálculo diferencial

- **Definição da derivada de uma função**

Dada uma função *F(x)* definida no domínio D_F, sendo *a* abcissa de um ponto P, tal que $a \in D_F$. A derivada da função *F(x)* no ponto P é dada pela expressão:

$$F'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{a-h} \quad \text{ou}$$

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{x-h} = f(x)$$

A função *f(x)* chama – se a primeira derivada.

Regras de derivação imediata

Função constante

$f(x)=k \Rightarrow \quad f'(x)=0$

Função potência

$f(x)=x^n \Rightarrow \quad f'(x)=nx^{n-1}$

Função polinomial

Função composta

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n \Rightarrow$

$f'(x)=(a_0x^n)'+(a_1x^{n-1})'+...+(a_n)'$

Derivada da soma

$f(x)=u \pm v \Rightarrow \quad f'(x)=u' \pm v'$

Função afim

$f(x)=ax+b \Rightarrow \quad f'(x)=a$

Função produto

$f(x)=u \times v \Rightarrow \quad f'(x)=u'v+uv'$

Função quociente

$f(x)=\dfrac{u}{v} \Rightarrow \quad f'(x)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Função composta

$f(x)=u^n \Rightarrow \quad f'(x)=nu^{n-1}u'$

Derivada da função exponêncial

Função exponêncial de base *e*

$f(x)=e^u \Rightarrow \quad f'(x)=u'e^u$

Função exponêncial de base *a*

$f(x)=a^u \Rightarrow \quad f'(x)=u'a^u \ln(a)$

Derivada da função logarítmica

Função logarítmica de base *e*

$$f'(x)=(x^5+2x^3+x)' \Leftrightarrow f'(x)=5x^4+6x^2+1$$

$$\Rightarrow f''(x)=(5x^4+6x^2+1)' \Leftrightarrow f''(x)=20x^3+12x$$

33. Resposta:

A função não é derivável no ponto de abcissa $x=\dfrac{3}{2}$

34. Resposta:

A primeira derivada da função é nula no ponto de coordenadas (0;-2).

35. Resposta:

A função tem primeira derivada positiva em $x \in \left]0;\dfrac{3}{2}\right[$

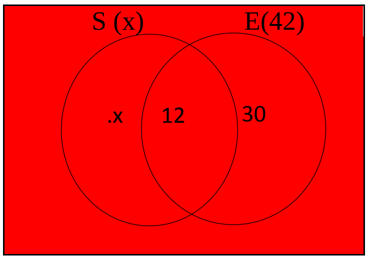
- **<u>Somente para Secção de Letras</u>**

36. Resposta:

Se P e Q são dois conjuntos quaisquer, então o complementar da intersecção esses P e Q será igual a reunião de complementares, simbolicamente fica:

$$\overline{P \cap Q} = \overline{P} \cup \overline{Q}$$

37. Resposta ao problema:



n(U)=76

$n(S)=?$

$\Rightarrow n(S)+n(E)+n(S \cap E)=n(U)$

$x+30+12=76$

$x=76-42 \Rightarrow x=34$

São 34 pessoas que tinham acesso a sa

38. Resposta:

Se rectas paralelas ao eixo das abcissas não intersectarem o gráfico de uma função $y=f(x)$ em mais do que um ponto diz se que a função é injectiva

39. Resposta:

De acordo com o gráfico se $x \in]2;+\infty[$ então $f(x)=3 \Rightarrow f'(4)=0$

40. Resposta:

Dada a função lucro semanal $f(x)=50-x^2$

$$f(x)=50x-x^2 \Rightarrow f'(x)=50-2x;\ -2x=-50 \Leftrightarrow x=\frac{-50}{-2} \Leftrightarrow x=25$$

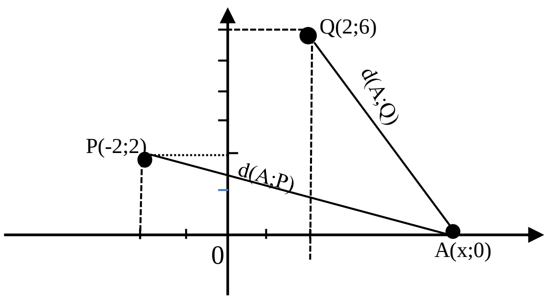
$$f(25)=50\times 25-25^2 \Leftrightarrow f(25)=1250-625=625$$

O lucro máximo semanal é igual a 625 meticais.

- **<u>Somente para Secção de Ciências</u>**

36. Resposta

Para resolver este problema, vamos fazer um esboço :



$d(A;Q)=d(A;P) \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x-x_Q)^2+(y-y_Q)^2} = \sqrt{(x-x_p)^2+$

$(x-2)^2+(0-6)^2=(x+2)^2+(0-2)^2$

$x^2-4x+4+36=x^2+4x+4+4 \Leftrightarrow$

$-8x=-32 \Rightarrow x\dfrac{-32}{-8} \Leftrightarrow x=4$

O ponto procurado é (4 ; 0)

$f(x)=\ln(u)\Rightarrow \quad f'(x)=\frac{u'}{u}$

Função logarítmica de base *a*

$f(x)=\log_a(a)\Rightarrow$

$f'(x)=\frac{u'}{u\ln(a)}$

Derivada da função trigonométrica
Função seno

$f(x)=sen(x)\Rightarrow \quad f'(x)=\cos(x)$

$f(x)=sen(u)\Rightarrow \quad f'(x)=u'\cos(u)$

Função co-seno

$f(x)=\cos(x)\Rightarrow \quad f'(x)=-sen(x)$

$f(x)=\cos(u)\Rightarrow \quad f'(x)=-u'sen(u)$

Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivavel em]a, b[.

- Se $f'(x)>0$ para todo $x\in]a,b[$, então f é estritamente crescente em $[a,b]$
- Se $f'(x)<0$ para todo $x\in]a,b[$, então f é estritamente decrescente em $[a,b]$

Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e tem um máximo ou um mínimo em c do intervalo $]a,b[$, então $f'(c)=0$ ou $f'(c)$ não existe.

Um elemento *c* do domínio de uma função *f* é um ponto crítico de *f* se então $f'(c)=0$ ou $f'(c)$ não existe.

É uma soma de monómios não semelhantes
Um polinómio de uma variável tem a seguinte fórmula geral:

$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$

Onde

37. Resposta:

Dado os pontos $P\left(\frac{1}{2};k\right);Q\left(\frac{2}{3};0\right)\wedge R(-1;6)$ para que estes três pontos sejam colineares devem pertencer a uma mesma recta.

Vamos determinar uma equação da recta que passa pelos pontos Q e R, $y=mx+b$

$$m=\frac{\Delta_y}{\Delta_x}=\frac{6-0}{-1-\frac{2}{3}}\Leftrightarrow m=\frac{6}{\frac{-5}{3}}=-\frac{18}{5}\Rightarrow y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y=\frac{-18}{5}\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

$$y=-\frac{18}{5}x+\frac{12}{5}\to x=\frac{1}{2}\wedge y=k\Rightarrow k=-\frac{18}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{12}{5}\Leftrightarrow k=-\frac{9}{5}+\frac{12}{5}\Leftrightarrow k=\frac{3}{5}$$

Para que os três pontos sejam colineares, o valor de k deve ser igual a $\frac{3}{5}$

38.Resposta:

Considerando a função $f(x)=ksenx+p$ cujo $D'_f=[2;4]$

Consideremos a função $y=senx$, o contradomínio dessa função é $D'_y=[-1;+1]$

Vamos considerar a função $y_1=ksen(x)$, o gráfico dessa função obtém se a partir do gráfico da função $y=senx$, onde a ordenada de cada ponto vai ser multiplicado por k unidades e o contradomínio passa a ser : $D'_{y_1}=[-1\times k;+1\times k]\Leftrightarrow D'_{y_1}=[-k;k]\Leftrightarrow$

Já o gráfico o gráfico de $f(x)=ksenx+p$, é obtido a partir do gráfico da função $y_1=ksen(x)$, onde cada valor da ordenada será adicionada p unidades e o contradomínio passa ser: $D'_f=[-k+p;k+p]$

No enunciado já adiantaram que o contradomínio da função $f(x)=ksenx+p$ é $D'_f=[2;4]$, portanto vamos igualar os dois contradomínios equivalentes:

$$D'_f=[-k+p;k+p]=[2;4]\Rightarrow\begin{cases}-k+p=2\\k+p=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}----\\2p=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}----\\p=\frac{6}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-k+3=2\\p=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=1\\p=3\end{cases}$$

39. Resposta:

Vamos determinar a função inversa da função $f(x)=\log_3(x+2)$ vamos aplicar directamente a definição do logaritmo: $f(x)=\log_3(x+2)\Leftrightarrow x+2=3^{f(x)}\Leftrightarrow x=3^{f(x)}-2\Leftrightarrow f^{-1}(x)=3^x-2$

40.Resposta

Dado o número complexo $Z=1-(k-5)i$. Para que Z represente um número real puro, k-5 deve ser nulo, $(k-5)=0\Leftrightarrow k=0+5\Leftrightarrow k=5$

FIM

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in IR \wedge n \in IN$

É uma regra que é usada para determinar o quociente entre o polinómio de grau *n* e um binómio línear *x* - *a*.

Conjunto é uma colecção de objectos da mesma espécie.

5. Reunião de conjuntos
6. Intersecção de conjuntos
7. Diferença de conjuntos
8. Complementar de conjuntos

Dado um ponto P(x_0, y_0) e recta r: $Ax + Bx + C = 0$ no plano, a distância entre o ponto P e a recta *r* representada por d(P, r) é dada por:

$$d(P,r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, com\ cx + d \neq 0$$

Para responder o número 38 é preciso ter conhecimentos profundo de números complexos conjugados

Dois números complexos dizem – se conjugados quando tem partes reais iguais e partes imaginárias simétricas. O onjugado de número complexo z representa – se por $\bar{z}$
Exemplo:
$3 + 4i \wedge 3 - 4i$ são dois números complexos conjugados.

As regras de primitivação de funções obtém – se através das regras de derivação, assim temos:
$\int (k) dx = kx + c$

$\int (ku)dx = k\int xdx$

$\int u^n u' \, dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

$\int (u \pm v)dx = \int udx + \int vdx$

$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C$

$\int e^u u' \, dx = e^u + c$

$\int a^u u' \, dx = \frac{a^u}{\ln(a)} + C$

$\int \sin xdx = -\cos x + C$

$\int \cos xdx = \sin x + C$

Integração por parte

$\int uv' \, dx = uv - \int u' vdx$

Para responder o número 40 é preciso ter conhecimentos profundo de tipos de funções modulares

4. Função modular do tipo $y = f(|x|)$

5. Função modular do tipo $y = |f(x)|$

6. Função modular do tipo $y = |f(|x|)|$

Bibliografias

[1]. NEVES, M. A. Fereira e SILVA, J. Nuno, *Matemática 12ª classe*, Plural editores, 1ª edição, Maputo, 2017

[2]. FAGILDE, Sarifa A. Magde**,** *Matemática 11ª classe,* Texto editores, 2ª edição, Maputo 2017

[3]. DEMIDOVITCH, G. Baranenkov, YANPOLSKI, E. Sitcheva, *Problemas e exercícios de análise Matemática*, Editora Mir Moscovo, 5ª edição, 1986.

[4]. NHEZE, Ismael Cassamo, *Matemática 8ª classe*, Texto editores, 2ª edição Maputo 2017

Anexos