REPÚBLICA DE MOÇAMBIQUE

FAZER EXAME COM CERTEZA

MATEMÁTICA
12ª CLASSE

15 Exames . 645 Exercícios Resolvidos

2008 a 2012

Escola Secundária Joaquim Chissano
Xai-Xai

JICA

JUSTIFICATIVA DO VOLUNTÁRIO DA JICA SOBRE O LIVRO “ FAZER EXAME COM CERTEZA ”

Até agora, é muito difícil os alunos encontrarem os passos de resolução dos exames finais de Matemática e é mais difícil encontrarem um espaço para colocar as dificuldades aos seus professores de Matemática. Penso que a razão deste fenómeno prende-se com a ocupação excessíva dos professores e reduzida carga horária de Matemática em Moçambique. Por isso, muitos alunos não conseguem a satisfsfação das suas dúvidas fora do pouco tempo lectivo programado no horário. Desde que comecei a trabalhar em Moçambique, eu percebi que muitos alunos têm sede de receber a explicação dos exames pelos seus professores. Além disso, muitos alunos moçambicanos pensam que Matemática é a disciplina mais complicada porque eles não têm o hábito e o gosto de resolver muitos exercícios de Matemática. Penso que isto é um problema grave e é necessário mudar esta situação.

Este manual “**FAZER EXAME COM CERTEZA**”, uma coletânia de 15 exames de 2008 a 2012 com 645 exercícios resolvidos é uma contribuição para resolver este problema. Os alunos têm neste livro a oportunidade de encontrar os passos detalhados de resolução dos exames finais de Matemática. Os alunos podem ler e compreender este manual sozinhos.
Através deste manual, desejo que muitos alunos consigam resolver correctamente os exercícios de Matemática, tenham o gosto pela Matemática e alcancem bons resultados no exame final. Assim, os alunos não terão medo de exame de Matemática. Hão de perceber que muitos exercícos apresentam uma característica comum no passos necessários para sua resolução.
Com este manual, os alunos fazem exame com certeza de passar de classe.

O manual “**FAZER EXAME COM CERTEZA”** também é um instrumento de apoio aos professores de Matemática para preparar melhor os seus alunos. Sei que os colegas professores sempre têm muita ocupação mas penso que a obrigação profissional de um professor é atender bem as solicitações dos alunos, dar as aulas com amor e ter os alunos bem capacitados para passar nos exames. Os professores podem criar um ambiente favorável para que os alunos aprendam bem Matemática, aumentando o contacto com os alunos, dando fichas de exercícios, resolvendo mais exercícios com alunos e escutando as preocupações dos alunos em relação à Matemática.

Os assuntos deste livro não são suficientes e nunca serão suficientes para cobrir todas as necessidades matemáticas dos alunos. Muitos alunos das escolas secundárias precisam de ajuda dos professores de Matemática para entender melhor a Matemática. Além disso, muitos graduados do ensino secundário precisam de entender os passos de resoluçao dos exames de admissão às faculdadeds. Penso que os colegas professores podem produzir melhores manuais de apoio aos alunos, num espírito de amor, sacrifício e volutariadade. Assim, estaremos a mostrar que Matemática é a disciplina mais interessante para os nossos alunos.

Xai-Xai, Dezembro 2012
Takaaki Kamioka

PREFÁCIO

A introdução do Novo Currículo do Ensino Secundário Geral, iniciada em 2008, criou a necessidade de se reformular o sistema de avaliação e a forma de exame para o 2º Ciclo do Ensino Secundário Geral. Adoptou-se um exame que assume sempre a forma escrita, que se realiza em duas épocas, 1ª e 2ª, com respostas de escolha múltipla e elevado número de perguntas em cada época, exigindo do aluno maior rapidez de execução, comprovada competência, conhecimentos seguros, capacidades, habilidades e atitudes académicas mais desenvolvidas. Passados cinco anos da implementação do Novo Currículo do Ensino Secundário Geral, os resultados do exame de Matemática do 2º Ciclo, ano após ano, têm se mostrado negativos porque durante a realização da prova a maioria dos alunos entrega-se ao exercício da escolha de uma opção. Como que adivinhos, os alunos optam por uma alternativa que lhes parece favorável à resposta desejada e não se dignam a fazer algum raciocínio matemático ou cálculo necessário para a obtenção da solução correcta.

O presente manual é produto de uma reflexão de alguns professores de Matemática do 2º Ciclo da Escola Secundária Joaquim Chissano Xai-Xai subordinada ao tema "**FAZER EXAME COM CERTEZA**" - colectânea de 15 exames oficiais (1.ª Época, 2.ª Época e extraordinário) com 645 exercícios de Matemática do Ensino Pré-Universitário realizados nos últimos cinco anos na República de Moçambique.

O manual "**FAZER EXAME COM CERTEZA**" pretende servir aos estudantes do 2º Ciclo do Ensino Secundário Geral em Moçambique como guia prático e didáctico para a resolução dos exames de Matemática. Trata-se de fornecer aos estudantes finalistas do Ensino Secundário Geral bases seguras para que eles resolvam o exame de Matemática a contento, com conhecimento, competência, habilidade, eficiência e eficácia, desenvolvendo neles o carácter técnico, lógico, operacional e conceitual que se necessita na realização de uma prova de Matemática.

Cada exame apresenta enunciados e resoluções acompanhados de explicação, exemplos claros, conceitos e propriedades relativas aos assuntos examinados para complementar ou recordar o conhecimento dos estudantes.

Os autores do manual "**FAZER EXAME COM CERTEZA**" são professores com certa experiência em assuntos do ensino e aprendizagem de Matemática e com formação matemática em universidades moçambicana e japonesa. O manual reflecte as experiências partilhadas entre os professores de Matemática na Escola Secundária Joaquim Chissano-Xai-Xai no âmbito da cooperação entre Moçambique e Japão representada por Agência Japonesa de Cooperação Internacional (JICA). Não pretendem, de forma nenhuma, que o manual seja considerado único instrumento para a preparação dos alunos para os exames de Matemática.

Agradecimentos são endereçados à Direcção Provincial de Educação e Cultura de Gaza, à Agência Japonesa de Cooperação Internacional (JICA), à Escola Secundária Joaquim Chissano e à Professora Emi Nagasawa (Voluntária da JICA) pelo seu apoio especial para produção deste livro.

Os autores
Xai-Xai, Dezembro de 2012

Índice

República de Moçambique

Matemática	**Ministério da Educação**	**Exame Extraordinário**
12ª Classe / 2012	**Conselho Nacional de Exames, Certificação e Equivalências**	**120 Minutos**

Esta prova contém 40 perguntas com 4 alternativas de resposta para cada uma. Escolha a alternativa correcta e *RISQUE* a letra correspondente na sua folha de respostas. Responda a todas as primeiras 35 perguntas. As últimas 5 perguntas responda somente às da sua secção (Letras ou Ciências).

【Resolução】

1.

Qual das expressões é equivalente a $p \vee (\sim p \wedge q)$?

A. $\sim p \wedge q$ B. $p \vee q$ C. $\sim p \wedge \sim q$ D. $\sim p \vee \sim q$

2012. Extraordinário

【**Resolução**】

$p \vee (\sim p \wedge q) = (\boldsymbol{p \vee \sim p}) \wedge (p \vee q)$

$= \mathbf{V} \wedge (p \vee q)$

$= p \vee q$

Opção: B

⟵ **Propriedade distributiva**: $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

⟵ $A \vee \sim A = \mathrm{V}$ porque uma das proposições é V, isto é, A ou $\sim A$ é V.

⟵ $\mathrm{V} \wedge A = A$: O valor lógico V é o elemento neutro na conjunção.

2.

A tabela refere-se a equivalência material. Nestas condições, quais são os valores de x e y?

A. $x = 1$ e $y = 1$

B. $x = 0$ e $y = 1$

C. $x = 1$ e $y = 0$

D. $x = 0$ e $y = 0$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	x
1	0	0
0	1	0
0	0	y

2012. Extraordinário

【**Resolução**】

Pela leitura da tabela, conclui-se que 0 e 1 representam respectivamente falsa e verdadeira.
Logo, $x = 1$ e $y = 1$.

Opção: A

⟵ A equivalência de duas proposições só é verdadeira se ambas as proposições têm o mesmo valor lógico.

3.

Qual é a solução da equação $\sqrt{2x^2 + 3x - 10} = -2$?

A. $x = 2, x = -3,5$ B. $x = -3,5$ C. $x = 2$ D. $\emptyset$

2012. Extraordinário

【**Resolução**】

Como $\sqrt{2x^2 + 3x - 10} \geq 0$, a equação $\sqrt{2x^2 + 3x - 10} = -2$ é impossível. Por isso, a solução da equação é $\emptyset$.

Opção: D

⟵ Sendo $x \geq 0$, tem-se: $\sqrt{x} \geq 0$

4.

Qual é o domínio de existência da expressão $\dfrac{1}{x^2 - 4}$?

A. $\mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ B. $\mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$ C. $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ D. $\mathbb{R} \setminus \{2; 4\}$

2012. Extraordinário

【Resolução】

Como o denominador é diferente de zero, tem-se a condição:

$$x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$$

⟵ Factoriza-se $x^2 - 4$ aplicando $\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$

Portanto, o domínio é $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

Opção: C

5.

Qual é a solução da equação $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$?

A. $\{0; -2\}$ B. $\{0; 2\}$ C. $\{1; 4\}$ D. $\left\{\frac{4}{3}\right\}$

2012. Extraordinário

【Resolução】

A equação transforama-se em $(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

⟵ $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = 2^{x \cdot 2} = (2^x)^2$

Fazendo $2^x = t$, se $t > 0$, a equação fica:

⟵ $t > 0$ porque $a^x > 0, \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-4) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = 4$$

⟵ $t = 1$ e $t = 4$ satisfazem a condição $t > 0$.

Como $t = 2^x$, então:

$$2^x = 1 \vee 2^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^0 \vee 2^x = 2^2$$

⟵ Reduz-se os dois membros à mesma base.

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

⟵ Iguala-se os expoentes: $a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$

Opção: B

6.

Sabendo que $\text{sen}x = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, qual é o valor de $\cos x$?

A. $-\frac{5}{3}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{5}{3}$

2012. Extraordinário

【Resolução】

Substituindo $\text{sen}x$ por $\frac{4}{5}$ na fórmula fundamental da trigonometria $\text{sen}^2 + \cos^2 x = 1$, tem-se:

⟵ **Fórmula fundamental da trigonometria**: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{9}{25} \Leftrightarrow \cos x = \pm\frac{3}{5}$$

Se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, então $\cos x < 0$.

Portanto, o valor de $\cos x$ é: $\cos x = -\frac{3}{5}$

Opção: B

<Sinal das razões trigonométricas>

⟵

α	1° Q	2° Q	3° Q	4° Q
senα	+	+	-	-
cos α	+	-	-	+
tgα	+	-	+	-
cotgα	+	-	+	-

7.

Qual é a solução da inequação $\frac{2x+6}{2-x} < 0$?

A. $]-3; 2[$ B. $]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[$ C. $]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[$ D. $\mathbb{R}$

2012. Extraordinário

【Resolução】

A condição é: $2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

⟵ O denominador é diferente de zero

$$\frac{2x+6}{2-x} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6 > 0 \\ 2-x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x+6 < 0 \\ 2-x > 0 \end{cases}$$

⟵ $\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$

porque $\frac{+}{+} = +$ e $\frac{-}{-} = +$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > -3 \\ x > 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -3 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2 \vee x < -3$$

$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

porque $\frac{+}{-} = -$ e $\frac{-}{+} = -$.

Então, a solução da inequação é: $x < -3 \ \vee \ x > 2$

Opção: C

【Outra resolução】

Constroi-se a tabela:

	$\cdots$	-3	$\cdots$	2	$\cdots$
$2x+6$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	0	$+$	0	$-$
$\dfrac{2x+6}{2-x}$	$-$	$+$	$+$		$-$

$\longleftarrow$ -3 e 2 são os zeros do numerador e o denominador, respectivamente.

$\longleftarrow \dfrac{-}{+}=-;\ \dfrac{+}{+}=+;\ \dfrac{+}{-}=-;\ \dfrac{-}{-}=+$

A partir da tabela, a solução da inequação $\dfrac{2x+6}{2-x}<0$ é:

$x\in\,]-\infty;-3[\,\cup\,]2;+\infty[$

8.

Sabendo que α é um ângulo do 1° quadrante, a que quadrante pertence o ângulo $\pi-\alpha$?

A. I B. II C. III D. IV

2012. Extraordinário

【Resolução】

Como α é um ângulo do 1° quadrante, tem-se: $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

Multiplicando por -1 todos os ambros da inequação, tem-se:

$$0>-\alpha>-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}<-\alpha<0$$

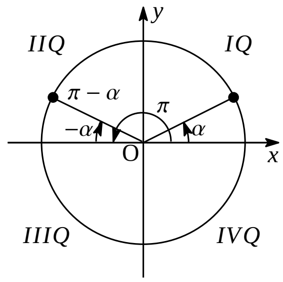
Adicionado π a ambos os membros da inequação, tem-se:

$$-\frac{\pi}{2}+\pi<\pi-\alpha<0+\pi\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}<\pi-\alpha<\pi$$

Logo, o ângulo $\pi-\alpha$ pentence ao 2° quadrante.

Opção: B

No circulo trigonométrico, tem-se:



$\pi-\alpha$ pertence ao 2° quadrante.

【Outra resolução】

Para se obter a solução, trata-se um ângulo do 1° quadrante.

Por exemplo, o ângulo $\alpha=\dfrac{\pi}{4}=45^\circ$ pertence ao 1° quadrante.

$\longleftarrow \pi=180^\circ$

Neste caso, tem-se: $\pi-\dfrac{\pi}{4}=180^\circ-45^\circ=135^\circ$

Como 135° perternce ao 2° quadrante, conclui-se que $\pi-\alpha$ pertence ao 2° quadrante.

9.

Sabendo que $\operatorname{tg}\alpha=-2$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$. Qual é o valor de $\operatorname{sen}\alpha+2\cos\alpha$?

A. $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ B. 0 C. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ D. 1

2012. Extraordinário

【Resolução】

$$\boldsymbol{\operatorname{tg}\alpha}=-2\Leftrightarrow\frac{\boldsymbol{\operatorname{sen}\alpha}}{\boldsymbol{\cos\alpha}}=-2\Leftrightarrow\operatorname{sen}\alpha=-2\cos\alpha$$
$$\Leftrightarrow\operatorname{sen}\alpha+2\cos\alpha=0$$

$\longleftarrow$ **Fórmula**: $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

Opção: B

10.

Qual é a solução da equação $|2x-6|=4$?

A. $x=1\vee x=5$ B. $x=3\vee x=5$ C. $\{\ \}$ D. $\mathbb{R}$

2012. Extraordinário

【Resolução】

$$|2x-6|=4\Leftrightarrow 2x-6=4\ \vee\ 2x-6=-4$$
$$\Leftrightarrow 2x=10\ \vee\ 2x=2\Leftrightarrow x=5\ \vee\ x=1$$

$\longleftarrow$ **Equação modular do tipo $|x|=a$, onde** $a\geq0$:
$|x|=a\Leftrightarrow x=a\ \vee\ x=-a$

Opção: A

11.

Qual é a condição para que $|3x-6|+x+11$ seja igual a $17-2x$?

A. $x \geq -11$ B. $x < 11$ C. $x < 2$ D. $x > 2$

2012. Extraordinário

【**Resolução**】

Resolve-se a equação $|3x-6|+x+11 = 17-2x$:

$$|3x-6|+x+11 = 17-2x \Leftrightarrow |3x-6| = -3x+6$$
$$\Leftrightarrow |3x-6| = -(3x-6)$$

Para que $|3x-6| = -(3x-6)$ é necessário que o número que está no dentro do módulo seja negativo, isto é:

$$3x-6<0 \Leftrightarrow x<2$$

⟵ Se $x \geq 0$, então $|x| = x$.
Se $x < 0$, então $|x| - x$.

Opção: C

【**Outra resolução**】

$$|3x-6|+x+11 = \begin{cases} 3x-6+x+11, & \text{se } 3x-6 \geq 0 \\ -(3x-6)+x+11, & \text{se } 3x-6<0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+5, & \text{se } x \geq 2 \\ \mathbf{-2x+17}, & \textbf{se } \boldsymbol{x<2} \end{cases}$$

⟵ $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Por isso, se $x<2$, então $|3x-6|+x+11 = 17-2x$.

12.

Qual é a expressão equivalente a $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$?

A. $n+1$ B. $n-1$ C. $n(n-1)$ D. $n(n+1)$

2012. Extraordinário

【**Resolução**】

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = (n+1)n$$

⟵ $(n+1)! = (n+1)n\overbrace{(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}^{(n-1)!}$
$= (n+1)n(n-1)!$

Opção: D

13.

Existem 7 cadeiras diferentes e pretende-se escolher 4. De quantas formas isso pode acontecer?

A. 35 B. 70 C. 270 D. 840

2012. Extraordinário

【**Resolução**】

Deseja-se o número total das maneiras diferentes possíveis de escolher 4 elementos dentre 7 elementos. Como não interessa ordem, trata-se de uma combinação de 7 elementos tomados 4 a 4, isto é:

$$C_7^4 = C_7^3 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot} = 35$$

⟵ $\boldsymbol{C_n^p}$ é o número total das maneiras diferentes possíveis de **escolher** p elementos dentre n elementos. Quando não interessa ordem, trata-se de uma combinação.

⟵ $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-r+1)}^{p \text{ factores}}}{p(p-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$

Opção: A

14.

De quantas maneiras diferentes se podem sentar 3 raparigas e quatro rapazes, num banco de sete lugares sabendo que em cada um dos extremos fica uma rapariga?

A. 20 B. 240 C. 720 D. 5040

2012. Extraordinário

【Resolução】

O número total das maneiras diferentes de em cada um dos extremos ficar uma rapariga é A_3^2 porque se escolhem 2 raparigas dentre 3 e se permutam as 2 raparigas entre si.

O número total das maneiras diferentes de permutar as restantes $7-2=5$ pessoas para prencherem os 5 lugares excepto os extremos é $P_5 = 5!$.

Portanto a solução é: $A_3^2 \cdot 5! = 3\cdot 2\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$

Opção: C

⟵ A_n^p é o número total das maneiras possíveis de escolher p elementos dentre n elementos e permutar os p elementos entre si. Quando interessa a ordem, trata-se de um arranjo.

$$A_n^p = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}_{p\text{factores}}$$

⟵ $P_n = n!$ é o número total das maneiras diferentes possíveis de permutar os n elementos numa fila.

15.

Num saco estão 4 bolas de igual tamanho numeradas de 1 a 4. Tirando-se sucessivamente sem reposição, as quatro bolas do saco, qual é a probabilidade de as bolas saírem por ordem crescente?

A. $\dfrac{1}{24}$ B. $\dfrac{1}{6}$ C. $\dfrac{1}{4}$ D. $\dfrac{2}{3}$

2012. Extraordinário

【Resolução】

O número de casos possíveis é $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$.
O número de casos favoráveis é 1.
Logo, a probabilidade pedida é $\dfrac{1}{24}$.

Opção: A

⟵ $C_4^1\cdot C_3^1\cdot C_2^1\cdot C_1^1$
⟵ Apenas um caso em ordem seguinte: ①②③④
⟵ Probabilidade= $\dfrac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$

16.

Qual das sucessões é divergente?

A. $\dfrac{n-1}{n+1}$ B. $\dfrac{n+1}{n}$ C. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ D. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

2012. Extraordinário

【Resolução】

Calcula-se o limite de cada sucessão das opções dadas:

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+1} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{1}{1} = 1$

B. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{1}{1} = 1$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n = \boldsymbol{\infty}$

D. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$

Como o limite da sucessão da opção C não é um número real, então esta sucessão é divergente.

Opção: C

⟵ Se o numerador e o denominador têm o mesmo grau, então o limite quando $x\to\infty$ é igual ao quociente dos coeficientes dos termos de maior grau, isto é:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\boldsymbol{a_1}x^n + b_1x^{n-1} + c_1x^{n-2} + \cdots}{\boldsymbol{a_2}x^n + b_2x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \cdots} = \frac{\boldsymbol{a_1}}{\boldsymbol{a_2}}$$

⟵ Se $a > 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$

⟵ Se $|a| < 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$

⟵ Uma sucessão a_n é convergente se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$.
Uma sucessão que não é convergente é divergente.

17.

Considere a sucessão $\left(1; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{9}; \dfrac{1}{27}; \cdots\right)$. Qual é o seu termo geral?

A. $U_n = \dfrac{n}{3^n}$ B. $U_n = \dfrac{1}{3^n}$ C. $U_n = \dfrac{1}{n^3}$ D. $U_n = \dfrac{1}{3^{n-1}}$

2012. Extraordinário

【Resolução】

Como o quociente entre dois termos conscutivos é constante $\dfrac{1}{3}$, esta sucessão é uma PG em que $a_1 = 1$ e $q = \dfrac{1}{3}$.

Logo, o termo geral desta sucessão é: $a_n = 1\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = \dfrac{1}{3^{n-1}}$

Opção: D

⟵ $1, \quad \dfrac{1}{3}, \quad \dfrac{1}{9}, \quad \dfrac{1}{27} \cdots$

$\times\frac{1}{3} \quad \times\frac{1}{3} \quad \times\frac{1}{3}$

⟵ O termo geral de uma PG é dado por $a_n = a_1q^{n-1}$

18.

Qual das sucessões NÃO forma nenhuma progressão?

A. $3; 12; 48; 192; \ldots$

B. $1; 3; 5; 7; \ldots$

C. $1; -3; 5; -7; \ldots$

D. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \ldots$

2012. Extraordinário

【**Resolução**】

A sucessão da opção A é uma PG em que $a_1 = 3$ e $q = 4$.
A sucessão da opção B é uma PA em que $a_1 = 1$ e $d = 2$.
A sucessão da opção C não é PA nem PG.
A sucessão da opção D é uma PG em que $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$.

Opção: C

Definição de PA e PG:

- ⋆ Se a diferença entre dois termos consecutivos de uma sucessão a_n é constante, então a_n é uma PA.
- ⋆ Se o quociente entre dois termos consecutivos de uma sucessão a_n é constante, então a_n é uma PG.

19.

Numa progressão aritmética finita, a soma dos seus termos é 110. Se o primeiro e o último termos são respectivamente 2 e 20, quantos termos tem a sucessão?

A. 21 B. 20 C. 11 D. 10

2012. Extraordinário

【**Resolução**】

Pela condição, tem-se: $S_n = 110$, $a_1 = 2$ e $a_n = 20$

Aplicando a fórmula de soma dos n primeiro termos de uma PA, tem-se: $\frac{n(2+20)}{2} = 110 \Leftrightarrow 11n = 110 \Leftrightarrow n = 10$

Opção: D

⟵ A soma dos n primeiros termos de uma PA é dada por: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ ou $S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$

20.

Qual é a solução da equação $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \cdots = 40$?

A. 10 B. 20 C. 30 D. 40

2012. Extraordinário

【**Resolução**】

A equação dada fica: $x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) = 40$

⟵ Coloca-se o factor comum x em evidência.

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ é a soma duma PG infinita em que $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$. Como $|q| = \frac{1}{2} < 1$, então tem-se:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

⟵ A soma de uma PG infinita em que $|q| < 1$ é dada por: $S = \frac{a_1}{1-q}$

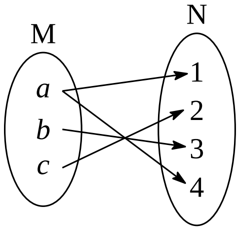
Logo, a equação dada fica:

$$x \cdot 2 = 40 \Leftrightarrow 2x = 40 \Leftrightarrow x = 20$$

Opção: B

21.

Dados os conjuntos $M = \{a; b; c\}$ e $N = \{1; 2; 3; 4\}$ considere a relação $R : M \to N$ representada na figura. Qual das opções representa a relação R?



A. $R = \{(a;1), (b;3), (c;4), (a;3)\}$

B. $R = \{(1;a), (4;a), (3;b), (c;2)\}$

C. $R = \{(a;1), (b;3), (c;2)\}$

D. $R = \{(a;1), (a;4), (b;3), (c;2)\}$

2012. Extraordinário

【**Resolução**】

A partir da figura, a relação R é:

$$R = \{(a;1),(a;4),(b;3),(c;2)\}$$

Opção: D

⟵ a corresponde a 1 e 4 $\Rightarrow (a;1),(a;4)$
b corresponde a 3 $\Rightarrow (b;3)$
c corresponde a 2 $\Rightarrow (c;2)$

22.

Qual é o contradomínio da relação $R = \{(1;1),(2;3),(3;5),(5;1),(7;7)\}$?

A. $CD = \{1;2;3;5;7\}$ B. $CD = \{1;2;5;7\}$ C. $CD = \{1;3;5;7\}$ D. $CD = \{3;5;7\}$

2012. Extraordinário

【**Resolução**】

Como $R = \{(1;\underline{1}),(2;\underline{3}),(3;\underline{5}),(5;\underline{1}),(7;\underline{7})\}$,
as imagens da relação R são 1, 3, 5 e 7.
Logo, $CD = \{1;3;5;7\}$

Opção: C

⟵ (objecto; imagem)

⟵ Ao conjunto das imagens chama-se contradomínio e representa-se por CD.

23.

Sabendo que na função $f(x) = ax - 11;\ a \in \mathbb{R},\ f(3) = 7$, qual é o valor da constante a?

A. 3 B. 6 C. 7 D. 11

2012. Extraordinário

【**Resolução**】

$f(3) = a \cdot 3 - 11 = 3a - 11$
Como $f(3) = 7$, tem-se: $3a - 11 = 7 \Leftrightarrow 3a = 18 \Leftrightarrow a = 6$

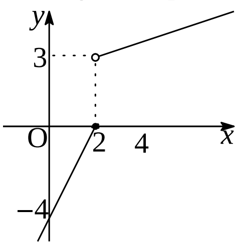
Opção: B

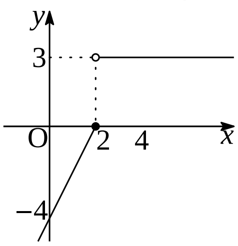
⟵ Substitui-se x por 3 em $f(x) = ax - 11$.

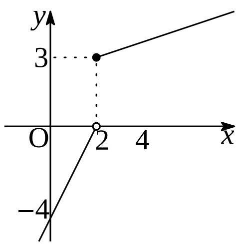
24.

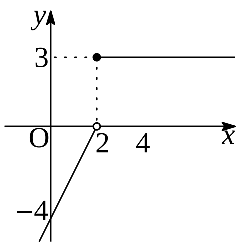
Considere a função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{se } x < 2 \\ 3 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

Qual das figuras representa o gráfico da função $f(x)$?

A.


B.


C.


D.


2012. Extraordinário

【**Resolução**】

Como a função $f(x)$ é constante se $x \geq 2$, o gráfico da função $f(x)$ para $x \geq 2$ é uma recta perpendicular ao eixo das abcissas.
A opção B ou D representa a função $f(x)$.
Como $f(x) = 3$ se $x \geq 2$, então $f(2) = 3$.
Portanto, o gráfico passa por $(2;3)$.
Por isso, a opção D representa a função $f(x)$.

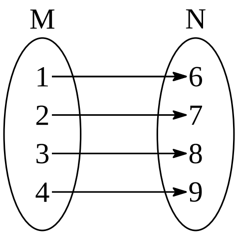
Opção: D

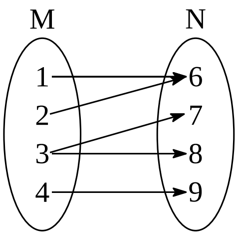
⟵ O gráfico de $y = a$ é uma recta que é perpendicular ao eixo de abcissas e passa por $(0;a)$.

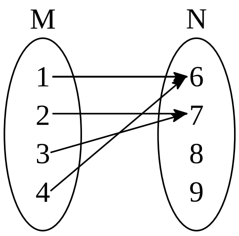
⟵ O ponto $(2;3)$ tem que ser pintado.

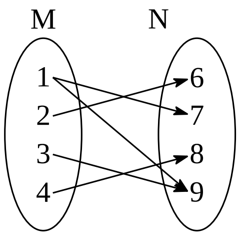
25.

Qual das figuras representa uma função sobrejectiva?

A.


B.


C.


D.


2012. Extraordinário

【**Resolução**】

A opção B não representa nenhuma função porque o objecto 3 corresponde a duas imagens 7 e 8.
E também, a opção D não representa nenhuma função porque o objecto 1 corresponde a duas imagens 7 e 9.
As opções A e C representam funções porque cala elemento de M corresponde a um e só um elemento de N.
Como o contradomínio da função da opção A é N, então a função da opção A representa uma função sobrejectiva.

⟵ Dá se o nome de **função** f a uma correspondência entre um conjunto M e um conjuto N se a cada elemento x de M corresponde a **um e só um elemento** $f(x)$ de N.

⟵ Uma função diz-se **sobrejectiva** quando o contradomínio coincide com o conjunto de chegada.

Opção: A

26.

Qual é a afirmação correcta?

A. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=0$ B. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=\infty$ C. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=3$ D. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=-6$

2012. Extraordinário

【**Resolução**】

Calcula-se $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$ e $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$:

$$\star\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x+3}=\frac{3^2-9}{3+3}=\frac{0}{6}=0$$

⟵ Como não é nenhuma indeterminação, basta substituir x por 3.

$$\star\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -3}\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}$$
$$=\lim_{x\to -3}(x-3)=-3-3=-6$$

⟵ Factoriza-se x^2-9 aplicando $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ e simplifica-se $x+3$ para levantar a indeterminação $\dfrac{0}{0}$.

Portanto, a opção correta é A.

Opção: A

27.

Qual é o valor do $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{sen}^2 x}{1-\cos x}$?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2012. Extraordinário

【**Resolução**】

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}^2 x}{1-\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}^2 x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}^2 x(1+\cos x)}{\mathbf{1-\cos^2 x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}^2 x(1+\cos x)}{\mathbf{sen^2 x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}(1+\cos x)$$
$$=1+1=2$$

⟵ Multiplica-se pelo conjugado $1+\cos x$ de $1-\cos x$ o numerador e o denominador.

⟵ $(1-\cos x)(1+\cos x)=1-\cos^2 x$ por $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

⟵ Como $\mathrm{sen}^2 x+\cos^2 x=1$, então $\mathrm{sen}^2 x=1-\cos^2 x$.

⟵ Simplifica-se $\mathrm{sen}^2 x$.

⟵ Substitui-se x por 0. $\cos 0=1$

Opção: B

28.

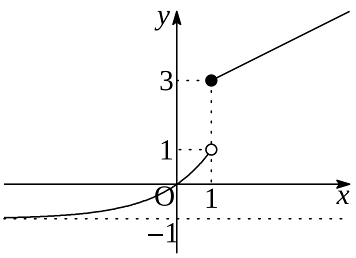
Na figura está representado o gráfico da função f. Qual é a alternativa correcta?

A. $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=1$

B. $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=3$

C. $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=3$

D. $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-1$



2012. Extraordinário

【Resolução】

Nota-se que quando x se aproxima de 1 pela direita, $f(x)$ se aproxima de 3 e quando x se aproxima de 1 pela esquerda, $f(x)$ se aproxima de 1.

Então tem-se: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$

Logo, a alternativa correcta é C.

Opção: C

⟵ Quando x se aproxima de a **pela esquerda**, $f(x)$ aproxima-se de α, simbolicamente, $\lim_{x\to a^-} f(x) = \alpha$.

Quando x se aproxima de a **pela direita**, $f(x)$ aproxima-se de α, simbolicamente, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \alpha$.

29.

Para que a função $f(x) = \begin{cases} k & \text{, se } x = 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{, se } x \neq 0 \end{cases}$ seja contínua em $\mathbb{R}$, qual deve ser o valor de k?

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2012. Extraordinário

【Resolução】

Para que $f(x)$ seja contínua em $\mathbb{R}$, é necessário que $f(x)$ seja contínua no ponto $x = 0$.

⟵ A partir da definição de $f(x)$, o gráfico de $f(x)$ muda-se no ponto $x = 0$.

Existe o limite de $f(x)$ no ponto $x = 0$ e seu valor é:

⟵ Para $x \neq 0$, os limites laterais são iguais.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \mathbf{1}$$

⟵ **Limite notável**: $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

O valor de $f(x)$ no ponto $x = 0$ é: $f(0) = \boldsymbol{k}$

Para que $f(x)$ seja contínua no ponto $x = 0$, é necessário que $k = 1$.

⟵ f é contínua em $x = a$ $\Leftrightarrow \exists \lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Opção: B

30.

Uma função real de variável real f é tal que $f(x) = f'(x)$ para todo o número real x. Qual das expressões pode definir a função f?

A. $3x^2$　　B. $\operatorname{sen} x$　　C. e^{5x}　　D. $2e^x$

2012. Extraordinário

【Resolução】

Calcula-se a primeira derivada de cada função das opções dadas e compara-se com $f(x)$:

A. $f'(x) = (3x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x \neq f(x)$ ⟵ $(x^2)' = 2x$ aplicando $\forall x \in \mathbb{R}, (x^n)' = nx^{n-1}$.

B. $f'(x) = (\operatorname{sen} x)' = \cos x \neq f(x)$ ⟵ $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$

C. $f'(x) = (e^{5x})' = e^{5x} \cdot (5x)' = 5e^{5x} \neq f(x)$ ⟵ $\left[e^{f(x)}\right]' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$ porque $(e^x)' = e^x$.

D. $f'(x) = (2e^x)' = 2e^x = f(x)$

Portanto, a solução é a opção D.

Opção: D

31.

Sendo $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, qual é o valor de $f'(1)$?

A. 3　　B. 1　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. -3

2012. Extraordinário

【Resolução】

Calcula-se $f'(x)$:

$$f'(x) = (x^{-3})' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

⟵ $\forall x \in \mathbb{R}, (x^n)' = nx^{n-1}$

Logo, $f'(1) = -\dfrac{3}{1^4} = -3$

⟵ Substitui-se x por 1 em $f'(x) = -\dfrac{3}{x^4}$

Opção: D

32.

Qual é a derivada da função $f(x) = 2^x \cdot x^2$?

A. $2^x x(\ln 2 + 2)$ B. $2^x x(x\ln 2 + 2)$ C. $2^x x(\ln x + 2)$ D. $2^x x(\ln x + 2x)$

2012. Extraordinário

【**Resolução**】

$$f'(x) = (2^x \cdot x^2)' = (2^x)' x^2 + 2^x (x^2)'$$ ⟵ $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$= 2^x \ln 2 \cdot x^2 + 2^x \cdot 2x = \mathbf{2^x x} \cdot x\ln 2 + \mathbf{2^x x} \cdot 2$$ ⟵ $(2^x)' = 2^x \ln 2$ aplicando $(a^x)' = a^x \ln a$

$$= 2^x x(x\ln 2 + 2)$$ ⟵ Coloca-se o factor comum $2^x x$ em evidência.

Opção: B

33.

Qual é a primeira derivada da função $f(x) = \ln x^2$?

A. $2\ln x$ B. $\dfrac{1}{x^2}$ C. $\dfrac{2}{x}$ D. $\dfrac{2x}{\ln x^2}$

2012. Extraordinário

【**Resolução**】

$$f'(x) = (\ln x^2)' = \frac{(x^2)'}{x^2} = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$ ⟵ $[\ln f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ porque $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Opção: C

34.

Dada a função $f(x) = x^3 - 1$. Quais são as abcissas dos pontos em que a função tem extremos?

A. $x = 1 \vee x = -1$ B. $x = -1$ C. $x = 0 \vee x = 1$ D. $x = 0$

2012. Extraordinário

【**Resolução**】

$f'(x) = (x^3 - 1)' = 3x^2$

Resolvendo $f'(x) = 0$, tem-se: $3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Logo, constroi-se a tabela de monotonia e extremos:

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$

A função $f'(x)$ tem um zero para $x = 0$, mas a partir da tabela, nota-se que não muda de sinal à direita e à esquerda desse valor. Por isso, a função $f(x)$ não tem nenhum extremo.

Opção: Nenhuma

⋆ Se uma função $f(x)$ tem derivada nula para $x = a$ e $f'(x)$ passa nesse ponto de negativa a positiva, a função $f(x)$ tem para $x = a$ um extremo mínimo.
⋆ Se uma função $f(x)$ tem derivada nula para $x = a$ e $f'(x)$ passa nesse ponto de positiva a negativa, a função $f(x)$ tem para $x = a$ um extremo máximo.
⋆ Ainda que $f(x)$ tenha derivada nula para $x = a$(ou seja $f'(a) = 0$), se o sinal de $f'(x)$ não muda à direita e à esquerda, a função $f(x)$ não tem extremos.

35.

A diferença entre dois números é 4. Quais são esses números se o produto dos mesmos for mínimo?

A. -2 e 2 B. -4 e 2 C. -4 e -2 D. 0 e 2

⋆2012. Extraordinário

【**Resolução**】

Sejam x e y dois números cuja diferença é 4.

Então, tem-se: $x - y = 4 \Leftrightarrow y = x - 4$

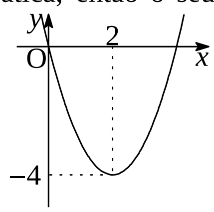
Seja p o produto dos dois números. Então tem-se:

$$p = x \cdot y = x(x - 4) = x^2 - 4x$$

Fazendo o quadrado perfeito, tem-se: $p = (x-2)^2 - 4$ ⟵ Quadrado perfeito: $x^2 + bx = \left(x + \dfrac{b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2}\right)^2$

Como a função $p = (x-2)^2 - 4$ é quadrática, então o seu gráfico é uma parabola que tem vértice $(2; -4)$ e tem a concavidade virada para cima como a figura mostra.

⟵ As coordenadado do vértice da função quadrática $y = a(x-p)^2 + q$ são dadas por $(p; q)$. Se $a > 0$, a parábola tem a concavidade virada para cima e Se $a < 0$, tem a concavidade virada para baixo.



Por isso, para $x = 2$, p é mínimo.

Logo, $y = 2 - 4 = -2$. ⟵ Substitui-se x por 2 em $y = x - 4$ para ter o valor de y.

Portanto os números são -2 e 2.

Opção: A

【**Outra resolução**】

Seja $p(x)$ o produto dos dois números x e y cuja diferença é 4.

Então $p(x) = x \cdot y = x(x-4) = x^2 - 4x$.

Calcula-se o mínimo da função $p(x)$.

Como $p'(x) = 2x - 4$, o zero da derivada da função $p(x)$ é:

$$2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

Constroi-se a tabela de monotonia e extremos:

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$p'(x)$	$-$	0	$+$
$p(x)$	$\searrow$	Mín	$\nearrow$

A partir da tabela, a função $p(x)$ tem o mínimo no ponto $x = 2$.

Logo, $y = 2 - 4 = -2$. Portanto os números pedidos são -2 e 2.

⟵ Como a diferença dos dois números x e y é 4, então $x - y = 4 \Leftrightarrow y = x - 4$.

⟵ $(x^2 - 4)' = 2x - 4$

⟵ Há possibilidade de ter um extremo no ponto $x = 2$.

⟵ Se $p'(x) < 0$, então $p(x)$ é decrescente.
Se $p'(x) > 0$, então $p(x)$ é crescente.
Se $p'(x) = 0$, então $p(x)$ é constante.

Somente para a Secção de Letras

36.

Qual é a alternativa NÃO correcta?

A. $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ B. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ C. $\mathbb{R} \cup \mathbb{N} = \mathbb{R}$ D. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$

2012. Extraordinário

【**Resolução**】

Verifica-se se cada alternativa é correta ou não.

A. $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ porque $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Logo é correcta.

B. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \neq \mathbb{N}$ porque $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ é exterior de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Logo não é correcta.

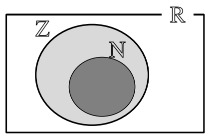
C. $\mathbb{R} \cup \mathbb{N} = \mathbb{R}$ porque $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Logo é correcta.

D. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ porque $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Logo é correcta.

Portanto, a solucção é B.

Opção: B

⟵ $\mathbb{R}$ = {Números reais}
$\mathbb{Z}$ = {Números inteiros}
$= \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$
$\mathbb{N}$ = {Números naturais} $= \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

37.

Qual dos conjuntos é igual a $Q = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x + 6 \leq 0\}$?

A. $[-3; -2]$ B. $]-3; -2]$ C. $]-\infty; -3] \cup [-2; +\infty[$ D. $]-\infty; -3[\cup]-2; +\infty[$

★2012. Extraordinário

【**Resolução**】

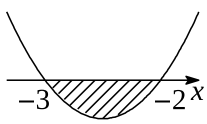
Resolve-se a inequação $x^2 + 5x + 6 \leq 0$.

$$x^2 + 5x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x+3) \leq 0$$

A partir da figura, tem-se:

$$-3 \leq x \leq -2$$

Portanto, $Q = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x + 6 \leq 0\}$
$= \{x : x \in [-3; -2]\}$



Opção: A

⟵ Factoriza-se $x^2 + 5x + 6$ aplicando $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

⟵ A inequação $f(x) \leq 0$ significa o intervalo de x, incluindo os extremos, cujo gráfico está em baixo do eixo das abcissas. A inequação $f(x) \geq 0$ significa o intervalo de x, incluindo os extremos, cujo gráfico está em cima do eixo das abcissas.

38.

Numa pesquisa realizada na loja do senhor João, verificou-se que dos clientes consultados, 120 compram arroz, 150 óleo e 80 compram as duas coisas (arroz e óleo) e 110 clientes não compram nada. Quantos clientes foram consultados?

A. 300   B. 220   C. 190   D. 110

2012. Extraordinário

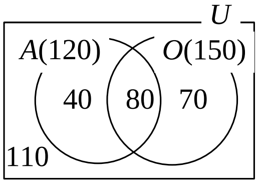
【**Resolução**】

Sejam U- Conjunto dos clientes que foram consultados

A- Conjunto dos clientes que compraram arroz

O- Conjunto dos clientes que compraram óleo

Então pode-se construir o diagrama de Venn como a figura mostra.



Os clientes que compraram só arroz são 120 − 80 = 40.

Os clientes que compraram só óleo são 150 − 70 = 80. Então, os clientes que foram consultados são:

$$40 + 80 + 70 + 110 = 300$$

Opção: A

⟵ Nota-se que: $n(A) = 120$, $n(O) = 150$, $n(A \cap O) = 80$ e $n(\overline{A \cup B}) = 110$

⟵ 120 compraram arroz e 80 compraram arroz e óleo.

⟵ 150 compraram óleo e 80 compraram arroz e óleo.

39.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$?

A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

2012. Extraordinário

【**Resolução**】

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-5x+6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{(x-3)\cancel{(x-2)}}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{1}{x-3} = \frac{1}{2-3} = -1$$

Opção: B

⟵ Factoriza-se x^2-5x+6 utilizando $x^2+(a+b)x+ab = (x+a)(x+b)$.

⟵ Substitui-se x por 2.

40.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^x$?

A. e^5 B. e^3 C. e^{-5} D. e^{-3}

2012. Extraordinário

【**Resolução**】

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}\right)^x = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x}-1\right)\cdot x}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}(-5)} = e^{-5}$$

Opção: C

Sejam $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$. Então tem-se:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\cdot g(x)}$$

【**Outra resolução**】

Como $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\boldsymbol{k}}{x}\right)^x = e^k$, então $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}\right)^x = e^{-5}$

Somente para a Secção de Ciências

36.

Qual é a equação da recta que passa pelo ponto (5; −3) e é paralela à recta $y = 2x - 1$?

A. $y = -2x + 3$ B. $y = 2x + 3$ C. $y = -2x - 13$ D. $y = 2x - 13$

2012. Extraordinário

【**Resolução**】

O declive da recta $y = 2x - 1$ é 2.

Como a recta desejada é paralela à recta $y = 2x-1$, o seu declive também é 2.

Portanto, a equação da recta que passa pelo ponto (5; −3) e tem o declive 2 é: $y-(-3) = 2(x-5) \Leftrightarrow y = 2x - 13$

Opção: D

⟵ O declive de uma recta $y = \boldsymbol{a}x + b$ é $\boldsymbol{a}$.

⟵ Se as duas rectas $y = \boldsymbol{a_1}x + b_1$ e $y = \boldsymbol{a_2}x + b_2$ são paralelas, então os declives são iguais, isto é: $\boldsymbol{a_1 = a_2}$.

⟵ A equação da recta que passa por $(x_1; y_1)$ e tem o declive a é dada por $y - y_1 = a(x - x_1)$.

37.

Sendo $f(g(x)) = 5x - 2$ e $f(x) = 5x + 4$, a que é igual $g(x)$?

A. $x - 2$ B. $x - \dfrac{5}{3}$ C. $x - \dfrac{6}{5}$ D. $5x - 2$

2012. Extraordinário

【Resolução】

Calcula-se: $f(g(x)) = 5g(x) + 4$

Como $f(g(x)) = 5x - 2$, tem-se:

$$5g(x) + 4 = 5x - 2 \Leftrightarrow 5g(x) = 5x - 6 \Leftrightarrow g(x) = x - \frac{6}{5}$$

⟵ Substitui-se x por $g(x)$ em $f(x) = 5x + 4$.

Opção: C

38.

Qual é a inversa da função $f(x) = \log_3(x+3)$?

A. $f^{-1}(x) = 3^x + 3$ B. $f^{-1}(x) = 3^x - 3$ C. $f^{-1}(x) = 3^{x-3}$ D. $f^{-1}(x) = 3^{x+3}$

2012. Extraordinário

【Resolução】

Substituindo $f(x)$ por y, tem-se: $y = \log_3(x+3)$.

Resolve-se em ordem a x:

$$\log_3(x+3) = y \Leftrightarrow .\log_3(x+3) = \log_3 3^y$$
$$\Leftrightarrow x + 3 = 3^y \Leftrightarrow x = 3^y - 3$$

⟵ Adopta-se $\log_3$ no segundo membro da equação.

⟵ Como as bases dos dois membros da equação são iguais, iguala-se os logaritmandos.

Trocando as variáveis x por y e y por x, tem-se: $y = 3^x - 3$, que é a função inversa pedida, $f^{-1}(x) = 3^x - 3$.

⟵ Como a função dada é logarítmica, a sua inversa é uma função exponencial.

Opção: B

39.

Qual é a solução de $\int \left(\operatorname{sen} x + \frac{3}{x}\right) dx$?

A. $\cos x + 3\ln|x| + c$ B. $\ln|x| - \cos x + c$ C. $\cos x - 3\ln|x| + c$ D. $3\ln|x| - \cos x + c$

2012. Extraordinário

【Resolução】

Deriva-se a função de cada opção para se encontrar a função cuja primeira derivada é $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{3}{x}$:

A. $(\cos x + 3\ln|x| + c)' = -\operatorname{sen} x + \frac{3}{x}$

B. $(\ln|x| - \cos x + c)' = \frac{1}{x} + \operatorname{sen} x$

C. $(\cos x - 3\ln|x| + c)' = -\operatorname{sen} x - \frac{3}{x}$

D. $(3\ln|x| - \cos x + c)' = \boldsymbol{\frac{3}{x} + \operatorname{sen} x = f(x)}$

⟵ $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$; $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$; $(c)' = 0, \forall c \in \mathbb{R}$

Portanto, a opção correcta é D.

Opção: D

Definição da função primitiva:
Sejam $F(x)$ e $f(x)$ duas funções contínuas. A função $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ para qualquer x do domínio de $f(x)$ se a derivada de $F(x)$ é igual a $f(x)$. Isto é: $F'(x) = f(x)$.

Definição do integral indefinida:
Se $f(x)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, então chama-se integral indefinida, à expressão $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ e c é uma constante.

Se $F'(x) = f(x)$, então $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

【Outra resolução】

Determina-se a primitiva de $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{3}{x}$.

O integral de $f(x)$, sendo $c \in \mathbb{R}$, é:

$$\int \left(\operatorname{sen} x + \frac{3}{x}\right) dx = -\cos x + 3\ln|x| + c$$

⟵ $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$, $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$

40.

A que é igual o módulo de $z = 2 + i$?

A. $\sqrt{5}$ B. $5i$ C. 25 D. $3i$

2012. Extraordinário

【Resolução】

$|z| = |2 + i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

⟵ Dado o número complexo $z = a + bi$, o módulo de z é dado por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Opção: A

FIM

República de Moçambique

Matemática	**Ministério da Educação**	**1ª Época**
12ª Classe / 2012	**Conselho Nacional de Exames, Certificação e Equivalências**	**120 Minutos**

Esta prova contém 40 perguntas com 4 alternativas de resposta para cada uma. Escolha a alternativa correcta e *RISQUE* a letra correspondente na sua folha de respostas. Responda a todas as primeiras 35 perguntas. As últimas 5 perguntas responda somente às da sua secção (Letras ou Ciências).

【Resolução】

1.

Considere as seguintes expressões: $I : 4 + \dfrac{1}{5}$; $II : \sqrt[3]{5} + 3 > 3$; $III : 2x + 1 = 0$; $IV : 6 \leq 10$. Quais representam proposições?

A. I e II B. I e III C. II e IV D. III e IV

2012. 1ª época

【Resolução】

II e IV são proposições porque é possível dizer se são verdadeiras ou falsas.
I e III não são proposições porque não é possível dizer se são verdadeiras ou falsas.

Opção: C

⟵ Uma proposição é uma expressão à qual é possível atribuir um valor lógico (verdadeiro ou falso).

2.

Considere o conjunto $M = \{-2; -1; 0; 1; 3\}$. Qual é a proporsição verdadeira?

A. $\forall x \in M : 2x = 10$ B. $\exists x \in M : 2x = 40$ C. $\forall x \in M : x^2 + 9 = 17$ D. $\exists x \in M : x^2 > x + 1$

2012. 1ª época

【Resolução】

Na proposição D,
para $x = -2$, tem-se: $(-2)^2 > (-2) + 1 \Leftrightarrow 4 > -1$ é V.
Para $x = -1$, tem-se: $(-1)^2 > (-1) + 1 \Leftrightarrow 1 > 0$ é V.
Para $x = 3$, tem-se: $2^2 > 2 + 1 \Leftrightarrow 4 > 3$ é V
A proposição D é verdadeira porque existe pelo menos um elemento que pertence a M, tal que $x^2 > x + 1$.

Opção: D

⟵ Ao símbolo $\forall$ dá-se o nome de quantificador universar e lê-se «qual quer que seja».
Ao símbolo $\exists$ dá-se o nome de quantificador existencial e lê-se «existe pelo menos um».

3.

Qual é o valor de m na equação $\log_2 m = \log_2 8 + \log_2 2$?

A. 16 B. 8 C. 4 D. 2

2012. 1ª época

【Resolução】

$\log_2 m = \log_2 8 + \log_2 2 = \log_2 8 \cdot 2 = \log_2 16$
Por isso, tem-se: $\log_2 \boldsymbol{m} = \log_2 \mathbf{16} \Leftrightarrow \boldsymbol{m} = \mathbf{16}$

Opção: A

⟵ $\log_a M + \log_a N = \log_a M \cdot N$
⟵ Como as bases de ambos os membros da equação são iguais, pode-se igualar os logaritmandos.

4.

Qual é a solução da equação $\sqrt{x - 2} - 3 = 0$?

A. -1 B. 5 C. 7 D. 11

2012. 1ª época

【Resolução】

A equação $\sqrt{x-2}-3=0$ tem a condição: $x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$

Resolve-se a equação: $\sqrt{x-2}-3=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}=3$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, tem-se:

$$(\sqrt{x-2})^2=3^2 \Leftrightarrow x-2=9 \Leftrightarrow x=11$$

Opção: D

⟵ **Expressão algébrica irracional** $\sqrt[n]{x}$:
- ★ Se o índice n é par, então $x\geq 0$.
- ★ Se o índice n é ímpar, então $x\in\mathbb{R}$.

⟵ Como $11>2$, $x=11$ satisfaz a condição $x\geq 2$.

5.

Qual é a expressão equivalente a $\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}}$?

A. $\dfrac{1}{x+1}$ B. $\sqrt{x+1}$ C. $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+1}$ D. $x+1$

2012. 1ª época

【Resolução】

$$\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}=\frac{(x+1)}{\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}=\frac{\cancel{(x+1)}\sqrt{x+1}}{\cancel{x+1}}=\sqrt{x+1}$$

Opção: B

⟵ Racionaliza-se a fracção, multiplicando por $\sqrt{x+1}$ ambos os membros da fracção.

⟵ Simplifica-se $x+1$.

6.

Qual é o valor numérico de $\begin{vmatrix}1&-3&1\\1&0&-2\\3&-1&-4\end{vmatrix}$?

A. -3 B. -2 C. 2 D. 3

2012. 1ª época

【Resolução】

$$\begin{vmatrix}1&-3&1\\1&0&-2\\3&-1&-4\end{vmatrix}=1\cdot 0\cdot(-4)+(-3)\cdot(-2)\cdot 3+1\cdot 1\cdot(-1)$$
$$-[3\cdot 0\cdot 1+1\cdot(-3)\cdot(-4)+1\cdot(-1)\cdot(-2)]$$
$$=0+18-1-(0+12+2)=17-14=3$$

Opção: D

⟵ $\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=aei+bfg+cdh-(gec+dbi+ahf)$

7.

Qual é o valor de $\cos(-3660°)$?

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\dfrac{1}{2}$ C. $\dfrac{1}{2}$ D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2012. 1ª época

【Resolução】

$$\cos(-3660°)=\cos 3660°$$
$$=\cos(60°+3600°)=\cos(60°+360°\times 10)$$
$$=\cos 60°=\frac{1}{2}$$

Opção: C

⟵ $\text{sen}(-\alpha)=-\text{sen}\alpha$; $\boldsymbol{\cos(-\alpha)=\cos\alpha}$; $\text{tg}(-\alpha)=-\text{tg}\alpha$; $\text{cotg}(-\alpha)=-\text{cotg}\alpha$

⟵ Sendo $n\in\mathbb{Z}$, tem-se:
$\text{sen}(\alpha+360°\times n)=\text{sen}\alpha$; $\boldsymbol{\cos(\alpha+360°\times n)=\cos\alpha}$;
$\text{tg}(\alpha+180°\times n)=\text{tg}\alpha$; $\text{cotg}(\alpha+180°\times n)=\text{cotg}\alpha$

8.

Qual é a expressão simplificada de $\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\text{sen}x}$?

A. $2+\text{sen}x$ B. $\text{sen}x+\cos x$ C. $-\text{cotg}x$ D. $-\dfrac{1}{\text{sen}x}$

2012. 1ª época

【**Resolução**】

$$\frac{\cos 2x}{\cos x - \operatorname{sen}x} = \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x - \operatorname{sen}x} = \frac{\cancel{(\cos x - \operatorname{sen}x)}(\cos x + \operatorname{sen}x)}{\cancel{\cos x - \operatorname{sen}x}} = \cos x + \operatorname{sen}x = \operatorname{sen}x + \cos x$$

Opção: B

⟵ **Fórmula do ângulo duplo**:
$\star\operatorname{sen}2x = 2\operatorname{sen}x\cos x$; $\star\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
$\star\operatorname{tg}2x = \dfrac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$; $\star\operatorname{cotg}2x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg}x}$

9.
Considere a inequação $-|x| \leq 0$. Qual é a solução?
A. $\{\ \}$ B. $]-\infty; 0[$ C. $]0; +\infty[$ D. $\mathbb{R}$

2012. 1ª época

【**Resolução**】

Multiplicando por -1 ambos os membros da inequação, tem-se: $|x| \geq 0$

$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$ é sempre verdadeira.

Opção: D

⟵ Quando se multiplica ambos os membros da inequação por um número negativo, o sinal da desigualdade muda de sentido.
⟵ $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$

10.
Qual é a soma das raízes da equação $|3 + x| = 2$?
A. -6 B. -5 C. -4 D. -1

2012. 1ª época

【**Resolução**】

Primeiro, calcula-se as raízes da equação:
$|3 + x| = 2 \Leftrightarrow 3 + x = \pm 2 \Leftrightarrow x = -3 \pm 2 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -5$
Segundo, calcula-se a soma das raízes: $(-1) + (-5) = -6$

Opção: A

⟵ **Equação modular do tipo $|x| = a$, onde $a \geq 0$**:
$\star|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$

11.
Sendo ${}^{n}C_2 = 45, n > 2$ qual é o valor de n?
A. 90 B. 45 C. 10 D. 9

2012. 1ª época

【**Resolução**】

$${}^{n}C_2 = C_n^2 = \frac{A_n^2}{2!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Como ${}^{n}C_2 = 45$, tem-se:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 45 \Leftrightarrow n(n-1) = 90$$
$$\Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Leftrightarrow (n-10)(n+9) = 0$$
$$\Leftrightarrow n = 10 \vee n = -9$$

Como $n > 2$, então $n = 10$.

Opção: C

⟵ $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}^{p \text{ factores}}}{p(p-1)(p-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$

⟵ Fatoriza-se $n^2 - n - 90$ aplicando $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$
⟵ $n = -9$ não satisfaz a condição $n > 2$.

12.
Quantos números de três algarismos diferentes podem ser escritos com os algarismos do conjunto $M = \{1; 3; 7; 8; 9\}$?
A. 10 B. 30 C. 60 D. 125

2012. 1ª época

【**Resolução**】

O conjunto M tem 5 elementos. Deseja-se o número total das maneiras diferentes possíveis de escolher 3 elementos dentre 5 elementos e permutar os 3 elementos entre si.
Como interessa a ordem, trata-se de um arranjo de 5 elementos tomados 3 a 3, isto é:

$$A_5^3 = \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3}_{\text{3 factores}} = 60$$

Opção: C

⟵ $\boldsymbol{A_n^p}$ é o número total das maneiras possiveis de **escolher** p elementos dentre n elementos e **permutar** os p elementos entre si. Quando interessa a ordem, aplica-se um arranjo A_n^p. Quando não interessa a ordem, aplica-se uma combinação C_n^p.

⟵ $A_p^n = \dfrac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ factores}}$

13.

Duas moedas são lançadas uma vez ao mesmo tempo. Qual é a probabilidade de ao caírem, apresentarem faces idênticas?

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. 1

2012. 1ª época

【**Resolução**】

A probabildade de cairem com duas caras é: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
A probabilidade de cairem com duas coroas é também:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

A probabilidade pedida é igual à probabilidade de cairem com duas caras ou duas coroas.
Portanto a probabilidade pedida é: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Opção: B

⟵ Ao lançar uma moeda, a probabilidade de cair com uma cara e tabmém com uma coroa é $\frac{1}{2}$.

【**Outra resolução**】
Designa-se por C_1: cara e C_2: coroa.
Os acontecimentos possíveis são $2 \cdot 2 = 4$ que são os seguintes: C_1C_1; C_1C_2; C_2C_1; C_2C_2
O número de casos favoráveis é 2 que são os seguintes: C_1C_1; C_2C_2
Logo, a probabilidade é: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

14.

Uma caixa contém dez camisas das quais quatro são de mangas compridas. Extrai-se duas ao acaso. Qual é a probabilidade de que nenhuma das camisas extraídas seja de mangas compridas?

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{2}{3}$

2012. 1ª época

【**Resolução**】

Esta caixa contém 10 camisas das quais 4 são de mangas compridas e 6 são de mangas não compridas..
O número de casos possíveis é C_{10}^2 porque se escolhem 2 camisas dentre 10 camisas.
E o número de caso favoráveis é C_6^2 porque se escolhem 2 camisas de mangas não compridas dentre 6 camisas de mangas não compridas.

Por isso, a probabilidade pedida é: $\dfrac{C_6^2}{C_{10}^2} = \dfrac{\frac{6\cdot5}{2}}{\frac{10\cdot9}{2}} = \dfrac{6 \cdot 5}{10 \cdot 9} = \dfrac{1}{3}$

Opção: B

⟵ $\boldsymbol{C_p^n}$ é o número total das maneiras possíveis de **escolher** p elementos dentre n elementos. Quando **não interessa ordem**, trata-se de uma combinação.

$$C_p^n = \frac{A_p^n}{p!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-r+1)}^{p \text{ factores}}}{p(p-1)(p-2)\cdots3\cdot2\cdot1}$$

⟵ A probabilidade de um acontecimento A é dada por:

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\textbf{número de casos favoráveis}}{\textbf{número de casos possíveis}}$$

15.

Qual é a ordem do termo 3 na sucessão dada por $a_n = 2n - 1$?

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

2012. 1ª época

【**Resolução**】

Para se obter a ordem do termo 3 nesta sucessão, resolve-se a equação $a_n = 3$:

$$a_n = 3 \Leftrightarrow 2n - 1 = 3 \Leftrightarrow 2n = 4 \Leftrightarrow n = 2$$

Opção: A

⟵ a_n significa o termo da ordem n.

16.

Qual é o termo geral da sucessão: $2; 6; 18; \ldots$?

A. $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$ B. $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ C. $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ D. $a_n = 3 \cdot 3^{n-1}$

2012. 1ª época

【Resolução】

Como o quociente é constante 3, esta sucessão é uma PG em que $a_1 = 2$ e $q = 3$.

Então, o termo geral é: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

Opção: C

⟵ $2, \quad 6, \quad 18, \quad \ldots$
$\times 3 \quad \times 3 \quad \times 3$

⟵ O termo geral de uma PG é dado por $a_n = a_1 q^{n-1}$

17.

Qual é a característica correcta que corresponde a sucessão $a_n = 5 + 2^{-3n}$?

A. Constante B. Decrescente C. Crescente D. Oscilante

2012. 1ª época

【Resolução】

$$a_{n+1} - a_n = 5 + 2^{-3(n+1)} - (5 + 2^{-3n}) = 2^{-3n-3} - 2^{-3n}$$
$$= 2^{-3n} \cdot 2^{-3} - 2^{-3n} = 2^{-3n} \cdot \frac{1}{8} - 2^{-3n}$$
$$= 2^{-3n}\left(\frac{1}{8} - 1\right) = 2^{-3n} \cdot \left(\frac{1-8}{8}\right)$$
$$= 2^{-3n} \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) < 0$$

Conclui-se que $a_{n+1} - a_n < 0$. Portanto, a_n é decrescente.

Opção: B

⟵ Substituindo n por $n+1$ em $a_n = 5 + 2^{-3n}$, obtém-se $a_{n+1} = 5 + 2^{-3(n+1)}$.

⟵ $2^{-3n-3} = 2^{-3n} \cdot 2^{-3}$; $\quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

⟵ Coloca-se em evidência o factor comum 2^{-3n}, como $A \cdot B - A = A(B-1)$

⟵ Como $2^{-3n} > 0$ e $-\frac{7}{8} < 0$, então $2^{-3n} \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) < 0$.

⟵ Uma sucessão a_n é crescente se $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n > 0$
Uma sucessão a_n é decrescente se $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n < 0$

18.

De uma progressão aritmética sabe-se que o quarto termo é 17 e o décimo terceiro termo é 62. Quais são, respectivamente, os valores do 1° termo e da diferença?

A. -5 e 5 B. 2 e 5 C. 1 e 7 D. 5 e 17

2012. 1ª época

【Resolução】

Como o quarto termo da sucessão é 17 e o décimo terceiro termo é 62, então tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_4 = 17 \\ a_{13} = 62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + (4-1)d = 17 \\ a_1 + (13-1)d = 62 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 3d = 17 \cdots ① \\ a_1 + 12d = 62 \cdots ② \end{cases}$$

Calculando ① − ②, tem-se: $-9d = -45 \Leftrightarrow d = 5$

Substituindo d por 5 em ①, tem-se: $a_1 + 3 \cdot 5 = 17 \Leftrightarrow a_1 = 2$

Por isso, os valores do 1° termo e da diferença são, respectivamente, 2 e 5.

Opção: B

⟵ O termo geral de uma PA é dada por: $a_n = a_1 + (n-1)d$
Logo, neste caso, $a_4 = a_1 + (4-1)d$ e $a_{13} = a_1 + (13-1)d$.

⟵
$$\begin{array}{rcrcr} & a_1 & + & 3d & = & 17 \\ -) & a_1 & + & 12d & = & 62 \\ \hline & & - & 9d & = & -45 \end{array}$$

19.

Sabendo que o lucro semanal da venda de automóveis cumpre a ordem $(2000; 4000; 8000; \ldots)$, qual é o lucro obtido durante as primeiras 10 semanas?

A. 1024 B. 2046 C. 1024000 D. 2046000

2012. 1ª época

【**Resolução**】

Como o quociente entre dois termos consectivos da sucessão é constante 2, esta sucessão é uma PG em que $a_1 = 2000$ e $q = 2$. O lucro obtido durante as primeiras 10 semanas é igual à soma dos 10 primeiros termos, isto é:

$$S_{10} = \frac{2000(1-2^{10})}{1-2} = -2000(-1023) = 2046000$$

Opção: D

$\longleftarrow$ $2000, \underbrace{\quad}_{\times 2} 4000, \underbrace{\quad}_{\times 2} 8000, \underbrace{\quad}_{\times 2} \dots$

$\longleftarrow$ A soma dos n primeiros termos de uma PG é dada por: $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

20.

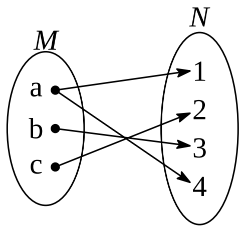
Dados os conjuntos $M = \{a; b; c\}$ e $N = \{1; 2; 3; 4\}$ considere a relação $R : M \to N$ representada na figura. Qual das opções é relação inversa de R?

A. $R^{-1} = \{(1; a), (4; a), (3; b), (2; c)\}$

B. $R^{-1} = \{(a; 1), (a; 4), (b; 3), (c; 2)\}$

C. $R^{-1} = \{(4; a), (2; c)\}$

D. $R^{-1} = \{(1; a), (2; c)\}$



2012. 1ª época

【**Resolução**】

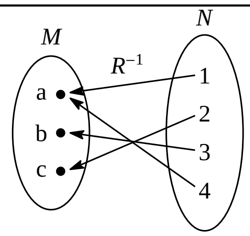
Pela leitura da figura, tem-se:

$R = \{(a; 1), (a; 4), (b; 3), (c; 2)\}$

Portanto, a relação inversa de R é;

$R^{-1} = \{(1; a), (4; a), (3; b), (2; c)\}$

Opção: A



21.

Qual é o contradomínio da relação $R = \{(x; y) : 2x + y = 8\}$, com x e y pertencentes ao conjunto $\mathbb{N}$?

A. $\{\ \}$ B. $\mathbb{N}$ C. $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ D. $\{0; 2; 4; 6; 8\}$

2012. 1ª época

【**Resolução**】

$2x + y = 8 \Leftrightarrow y = -2x + 8$

Começa-se por substituir $x = 0$. $\longleftarrow$ $\mathbb{N} = \{\text{Números naturais}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Se $x = 0$, então $y = -2 \cdot 0 + 8 = 8 \in \mathbb{N}$. $\longleftarrow$ $y = 8 \in CD_R$.

Se $x = 1$, então $y = -2 \cdot 1 + 8 = 6 \in \mathbb{N}$. $\longleftarrow$ $y = 6 \in CD_R$.

Se $x = 2$, então $y = -2 \cdot 2 + 8 = 4 \in \mathbb{N}$. $\longleftarrow$ $y = 4 \in CD_R$.

Se $x = 3$, então $y = -2 \cdot 3 + 8 = 2 \in \mathbb{N}$. $\longleftarrow$ $y = 2 \in CD_R$.

Se $x = 4$, então $y = -2 \cdot 4 + 8 = 0 \in \mathbb{N}$. $\longleftarrow$ $y = 0 \in CD_R$.

Se $x = 5$, então $y = -2 \cdot 5 + 8 = -2 \notin \mathbb{N}$. $\longleftarrow$ $y = -2 \notin CD_R$.

Continuando aumentar os valores de x, nota-se que para $x \geq 5$, já não é possível $y \in \mathbb{N}$.

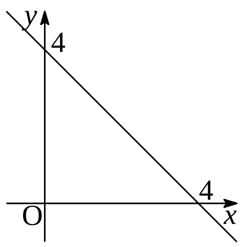
Por isso, o contradomínio de R é: $\{0; 2; 4; 6; 8\}$

Opção: D

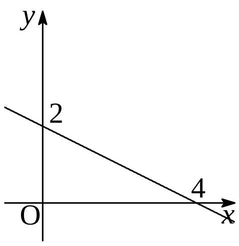
22.

Qual é o gráfico que representa a função $y = x + 2$ com $x; y \in \mathbb{R}$?

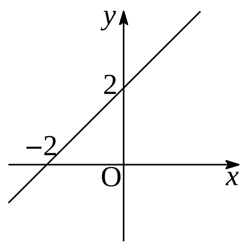
A.



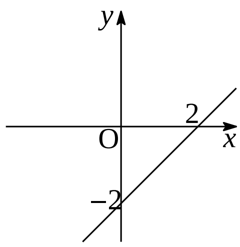
B.



C.



D.



2012. 1ª época

【**Resolução**】

O coeficiente de x da função $y = x + 2$ é $1 > 0$. Por isso, o gráfico é crescente. E como a ordenada na origem é 2, o gráfico passa pelo ponto $(0; 2)$.

Então, a opção C representa o gráfico da função $y = x + 2$

Opção: C

⟵ **Função do 1° grau $f(x) = ax + b$**:
★Se $a > 0$, então f é crescente.
Se $a < 0$, então f é decrescente.
Se $a = 0$, então f é constante.
★O gráfico passa pelo ponto $(0; b)$

23.

Qual é a abcissa do vértice do gráfico de uma função do 2° grau, cujos zeros são -7 e -1?

A. -4 B. -2 C. 2 D. 4

2012. 1ª época

【**Resolução**】

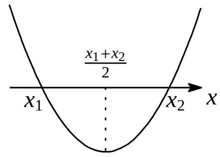
A abcissa do ponto médio dos zeros é:

$$\frac{-7 + (-1)}{2} = -4$$

Como a abcissa do vértice do gráfico de uma função do 2° grau é igual à abcissa do ponto médio dos zeros da função, então a solução é -4.

Opção: A

⟵ Sejam $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ dois pontos. Então, o ponto médio do segmento AB é $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

⟵ 

24.

Qual é o valor do $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$?

A. 2 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$

2012. 1ª época

【**Resolução**】

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{1 - cos^2\, x}}{x^2(1 + \cos x)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{sen^2 x}}{x^2(1 + \cos x)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$$
$$= 1^2 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Opção: C

⟵ Multiplica-se pelo conjugado $1 + \cos x$ de $1 - \cos x$ o numerador e o denominador.

⟵ $(1-\cos x)(1+\cos x) = 1-\cos^2 x$ porque $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

⟵ Como $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, então $1 - \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$.

⟵ **Limite notável**: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$;
$\cos 0 = 1$

25.

Qual é o valor do $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$?

A. e^2 B. e C. $\sqrt{e}$ D. $\frac{1}{e}$

2012. 1ª época

【**Resolução**】

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Opção: B

⟵ **Limite notável**:
★$\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$; ★$\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

26.

Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq -3 \\ 2x + 15 & \text{se } x > -3 \end{cases}$. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$?

A. -3 B. 0 C. 3 D. 9

2012. 1ª época

【Resolução】

Quando x se aproxima de -3 pela esquerda, $x < -3$.

Logo, quando $x \to -3^-$, $f(x) = x^2$. ⟵ $f(x) = x^2$, se $x \leq -3$.

Então o limite lateral à esquerda de $x = -3$ é:

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} x^2 = (-3)^2 = 9$$ ⟵ Substitui-se $f(x)$ por x^2.

Opção: D

27.

Considere a função $f(x) = \begin{cases} 4x+1 & \text{se } x < 3 \\ k+3 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$. Qual deve ser o valor de k para que a função seja contínua no ponto de abcissa $x = 3$?

A. 1 B. 3 C. 10 D. 13

2012. 1ª época

【Resolução】

Para que a função seja contínua em $x = 3$, é necessário que:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$$

⟵ $f(x)$ é contínua no ponto de abcissa $x = a$ $\iff \exists \lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ $\iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

O limite lateral à esquerda de $x = 3$ é:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(4x+1) = 4\cdot 3 + 1 = \mathbf{13}$$ ⟵ Quando $x \to 3^-$, isto é, $x < 3$, $f(x) = 4x + 1$.

O limite lateral à direita de $x = 3$ é:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(k+3) = \boldsymbol{k+3}$$ ⟵ Quando $x \to 3^+$, isto é, $x > 3$, $f(x) = k + 3$.

O valor da função no ponto $x = 3$ é: $f(0) = \boldsymbol{k+3}$ ⟵ $f(x) = k + 3$, se $x = 3$

Como estes são iguais, tem-se:

$$\boldsymbol{k+3=13} \Leftrightarrow k = 10$$

Opção: C

28.

Qual é a primeira derivada da função $f(x) = 4x^2 + 2x + 2$?

A. $f'(x) = 8x + 2$ B. $f'(x) = 4x + 2$ C. $f'(x) = x + 4$ D. $f'(x) = x + 2$

2012. 1ª época

【Resolução】

$f'(x) = 4\cdot 2x + 2\cdot 1 + 0 = 8x + 2$ ⟵ $(x^2)' = 2x$ e $(x)' = 1$ porque $\forall n \in \mathbb{R}, (x^n)' = nx^{n-1}$; $(2)' = 0$ porque $\forall k \in \mathbb{R}, (k)' = 0$

Opção: A

29.

Qual é a primeira derivada da função $f(x) = e^x \cdot \cos x$?

A. $e^x \operatorname{sen} x$ B. $e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$ C. $e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$ D. $e^x(\cos x - \operatorname{sen} x)$

2012. 1ª época

【Resolução】

$f'(x) = (e^x \cdot \cos x)' = (e^x)' \cdot \cos x + e^x \cdot (\cos x)'$ ⟵ $[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$= \boldsymbol{e^x} \cos x + \boldsymbol{e^x}(-\operatorname{sen} x) = \boldsymbol{e^x}(\cos x - \operatorname{sen} x)$ ⟵ $(e^x)' = e^x$; $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$

Opção: D

30.

Qual é a primeira derivada da função $y = \sqrt{x^2-1}$?

A. $\dfrac{2}{\sqrt{x^2-1}}$ B. $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$ C. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ D. $\dfrac{x}{2\sqrt{x^2-1}}$

2012. 1ª época

【**Resolução**】

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot (x^2-1)' = \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Opção: C

⟵ **Derivada de uma função composta**: $\left[\sqrt{f(x)}\right]' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$ porque $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

31.

Qual é a segunda derivada de $\cos x$?

A. $\cos x$ B. $\text{sen}x$ C. $-\text{sen}x$ D. $-\cos x$

2012. 1ª época

【**Resolução**】

Sendo $f(x) = \cos x$, a primeira derivada de $f(x)$ é:

$f'(x) = (\cos x)' = -\text{sen}x$ ⟵ $(\cos x)' = -\text{sen}x$

Logo, a segunda derivada de $f(x)$ é:

$f''(x) = (-\text{sen}x)' = -\cos x$ ⟵ $(\text{sen}x)' = \cos x$

A segunda derivada é a derivada da primeira derivada.

Opção: D

32.

Qual é a equação da recta tangente ao gráfico $f(x) = x^3 - x$ no ponto de $P(0;0)$?

A. $x+y=0$ B. $x-y=0$ C. $x+y+1=0$ D. $x+y-1=0$

2012. 1ª época

【**Resolução**】

Calcula-se $f'(x)$: $f'(x) = 3x^2 - 1$

A abcissa do ponto $P(0;0)$ é 0.

Então, o declive da recta tangente ao gráfico $f(x) = x^3 - x$ no ponto $P(0;0)$ é igual a $f'(0)$, isto é:

⟵ $f'(a)$ é igual ao declive da recta tangente ao gráfico de $f(x)$ em $x=a$.

$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 1 = -1$ ⟵ Substuitui-se x por 0 em $f'(x) = 3x^2 - 1$.

Como a recta tangente tem o declive -1 e passa por $(0;0)$, a equação da recta tangente é dada por:

$y - 0 = -1(x-0) \Leftrightarrow y = -x \Leftrightarrow x + y = 0$

⟵ A equação da recta que passa pelo ponto $(x_1; y_1)$ e tem o declive m é dada por: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Opção: A

33.

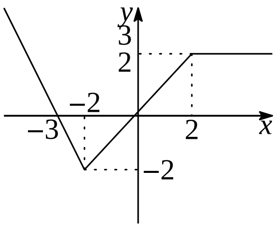
Considere a função representada. Quais são as abcissas dos pontos em que a função NÃO é derivável?

A. $x=-3$ e $x=2$

B. $x=-2$ e $x=2$

C. $x=0$ e $x=2$

D. $x=-3$ e $x=-2$



2012. 1ª época

【**Resolução**】

Calcula-se as derivadas laterais de $f(x)$ em $x=-2$ e $x=2$.

Pela leitura da figura, a derivada lateral à esquerda de -2 é:

$f'(-2^-) = \dfrac{-2-0}{-2-(-3)} = -2$

⟵ $f'(-2^-)$ é igual ao declive da recta da esquerda do ponto $x=-2$.

E a derivada lateral à direita de -2 é:

$f'(-2^+) = \dfrac{2-(-2)}{2-(-2)} = 1$

⟵ $f'(-2^-)$ é igual ao declive da recta da esquerda do ponto $x=0$.

Como $f'(-2^-) \neq f'(-2^+)$, então não é derivável em $x=-2$.

⟵ Uma função é derivável num ponto $x=a$ se e só se é derivável à esquerda e à direita do mesmo ponto e as derivadas laterais são iguais: $\boldsymbol{f'(a^+) = f'(a^-)}$

De mesmo modo, a derivada lateral à esquerda de 2 é:

$f'(2^-) = \dfrac{2-(-2)}{2-(-2)} = 1$

A derivada lateral à direita de 2 é 0 porque a recta da direita do ponto de $x = 2$ é uma função constante.
Como $f'(1^-) \neq f'(1^+)$, então também não é drivável em $x = 2$.

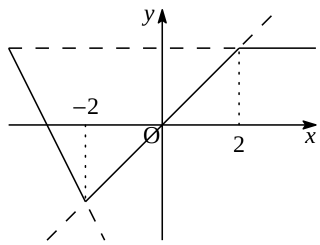
⟵ Se $f'(a^+) = f'(a^-)$, então $f(x)$ é derivável em $x = a$.

Por isso, a função não é derivável nos pontos $x = -2$ e $x = 2$.

Opção: B

【Outra resolução】

Observando o gráfico, é claro que os declives das rectas da esquerda e da direita do ponto $x = -2$ são diferentes.
Como os declives das rectas da esquerda e da direita do ponto $x = -2$ são iguais a $f'(-2^-)$ e $f'(-2^+)$ respectivamente, tem-se: $f'(-2^-) \neq f'(-2^+)$.
Também como os declives das rectas da esquerda e da direita do ponto $x = 2$ são diferentes, então $f'(2^-) \neq f'(2^+)$.
Por isso, a função não é derivável nos pontos $x = -2$ e $x = 2$.



⟵**O ponto anguloso não é derivável.**

34.
Em que intervalo a função $f(x) = x^3 - 12x$ é crescente?

A. $]-\infty; -2[$ B. $[-2; 2]$ C. $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$ D. $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

2012. 1ª época

【Resolução】

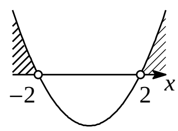
$f'(x) = 3x^2 - 12$ ⟵ $(x^3 - 12x)' = 3x^2 - 12$

Para que f seja cresente, é necessário que $f'(x) > 0$.

⟵ Se $f'(x) > 0$, então f é crescente.
Se $f'(x) < 0$, então f é decrescente.

Logo, resolve-se a inequação $f'(x) > 0$.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) > 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee 2 < x$$

⟵ 

Por isso, conclui-se que:
f é crescente no intervalo $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.

Opção: C

【Outra resolução】

Calcula-se os zeros de $f'(x)$:

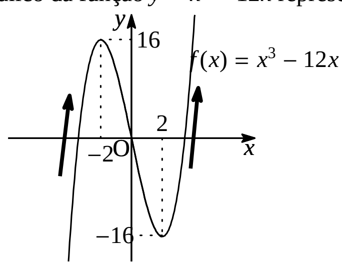
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

Constroi-se a tabela de monotonia e extremos:

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	Mín	$\nearrow$

A partir da tabela, couclui-se que $f(x)$ é crescente no intervalo $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$.

O gráfico da função $y = x^3 - 12x$ representa-se:



35.
A Maria decompôs o número 20 em duas parcelas x e y. Quais são essas parcelas se o seu produto é máximo?

A. $x = 0$ e $y = 20$ B. $x = 10$ e $y = 10$ C. $x = 8$ e $y = 12$ D. $x = 4$ e $y = 16$

2012. 1ª época

【Resolução】

Pela condição, tem-se: $x + y = 20 \Leftrightarrow y = -x + 20$
Seja p o produto dos números. Então tem-se:

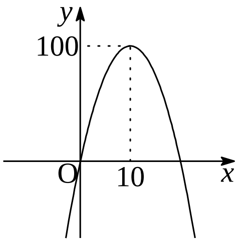
$$p = x \cdot y = x(-x + 20)$$ ⟵ Substitui-se y por $-x + 20$

Calcula-se o valor de x quando p é máximo.

$$p = x(-x + 20) = -x^2 + 20x = -(x^2 - 20x)$$
$$= -[(x - 10)^2 - 10^2] = -(x - 10)^2 + 100$$

⟵ Quadrado perfeito: $x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$

Então o gráfico da função é uma parábola do vertice $(10; 100)$ e tem a concavidade virada para baixo como a figura mostra.



⟵ As coordenadas de uma função quadrática $y = a(x - p)^2 + q$ são $(p; q)$ e se $a < 0$, o gráfico tem a concavidade volatada para baixo.

Por isso, para $x = 10$,
p é máximo.
Logo, $y = -10 + 20 = 10$.
Portanto os números são 10 e 10.

⟵ Substitui-se x por 10 em $y = -x + 20$ para ter o valor de y.

Opção: B

【Outra resolução】

Seja p o produto dos dois números x e y cuja soma é 20.
Então $p = x \cdot y = x(-x + 20) = -x^2 + 20x$.

⟵ $x + y = 20 \Leftrightarrow y = -x + 20$

Calcula-se o máximo da função $p(x)$.
Como $p' = 2x + 20$, o zero da derivada da função p é:

$$-2x + 20 = 0 \Leftrightarrow -2x = -20 \Leftrightarrow x = 10$$

⟵ $(-x^2 + 20x)' = -2x + 20$
⟵ Há possibilidade de ter um extremo no ponto $x = -10$.

Constroi-se a tabela de monotonia e extremos:

x	$\cdots$	10	$\cdots$
p'	$+$	0	$-$
p	↗	Máx	↘

⟵ Se $f'(x) < 0$, então $f(x)$ é decrescente.
Se $f'(x) > 0$, então $f(x)$ é crescente.
Se $f'(x) = 0$, então $f(x)$ é constante.

A partir da tabela, a função p tem o máximo no ponto $x = 10$.
Logo, $y = -x + 20 = -10 + 20 = 19$.
Por isso, os números pedidos são 10 e 10.

Somente para a secção de Letras

36.
Se $M = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 5\}$ e $N = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x < 8\}$. Qual das afirmações é verdadeira?

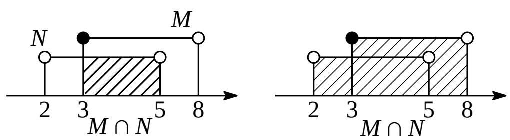
A. $M \cap N = [3; 5[$ B. $M \cup N = [3; 5]$ C. $M \cap N = [3; 5]$ D. $M \cup N = [3; 5[$

2012. 1ª época

【Resolução】

$M \cap N = [3; 5[$ e $M \cup N =]2; 8[$

⟵



Opção: A

37.
Sejam M e N dois conjuntos definidos no universo U. Qual é a expressão simplificada de $\overline{M} \cup (M \cup N)$?

A. $\emptyset$ B. U C. $\overline{M} \cup N$ D. $\overline{M} \cap N$

2012. 1ª época

【Resolução】

$$\overline{M} \cup (M \cup N) = (\overline{M} \cup M) \cup N$$
$$= U \cup N = U$$

⟵ **Propriedade assosiativa**: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
⟵ Sejam A qualquer conjunto e U conjunto universsal. Então;
$A \cup \overline{A} = U$; $A \cap \overline{A} = \emptyset$; $A \cup U = U$; $A \cap U = A$

Opção: B

38.
Numa escola de 630 alunos, 350 estudam matemática, 260 estudam português e 90 estudam as duas disciplinas. Quantos alunos NÃO estudam nenhuma das disciplinas?

A. 110 B. 170 C. 260 D. 520

2012. 1ª época

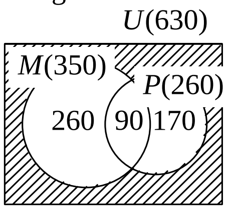
【Resolução】

Sejam *U*- Conjunto de todos os alunos da escola;

M- Conjunto dos alunos que estudam Matemática;

P- Conjunto dos alunos que estudam Português.

Pode-se construir o diagrama de Venn como a figura mostra.



Os alunos que gostam só de Matemática são: $350 - 90 = 260$

Os alunos que gostam só de Português são: $260 - 90 = 170$

Por isso, os alunos que não estudam nenhuma das disciplinas são:

$630-(260+90+170) = 630-520 = 110$

Opção: A

⟵ Nota-se que: $n(U) = 630$, $n(M) = 350$, $n(P) = 90$ e $n(M \cap P) = 90$

⟵ 350 estudam matemática e 90 estudam as duas diciplinas.

⟵ 260 estudam potugês e 90 estudama as duas diciplinas.

39.

Qual é o valor do $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$?

A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{4}$ D. $+\infty$

2012. 1ª época

【Resolução】

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}) = +\infty$

Opção: D

⟵ Não é nenhuma indeterminação. $\infty + \infty = \infty$

40.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x-1}$?

A. -4 B. -3 C. -2 D. -1

2012. 1ª época

【Resolução】

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{(x-4)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}}$$
$$= \lim_{x\to 1}(x-4) = 1-4 = -3$$

Opção: B

⟵ $x^2-5x+4 = (x-4)(x-1)$ porque $x^2+(a+b)x+ab = (x+a)(x+b)$

⟵ Substitui-se x por 1.

Somente para a secção de Ciências

36.

Qual é a equação da recta paralela à recta de equação $y = x+2$?

A. $y = -x+2$ B. $y = x+4$ C. $y = 2x-3$ D. $y = 2x+1$

2012. 1ª época

【Resolução】

O declive da recta $y = x+2$ é 1.

Como a recta desejada é paralela à recta $y = x+2$, o seu declive também é 1. Das opções dadas, somente a função $y = x+4$ da opção B tem o declive 1.

Logo, a opção correcta é B.

Opção: B

⟵ O declive de uma recta $y = ax+b$ é a.

⟵ Se as duas rectas $y = ax+b$ e $y = a'x+b'$ são paralelas, então os declives são iguais, isto é, $a = a'$.

37.

Sendo $f(x) = 2x$ e $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$, qual é o domínio de $(g\circ f)(x)$?

A. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ B. $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ C. $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ D. $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

2012. 1ª época

【Resolução】

Determina-se $(go f)(x)$: $(go f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = \dfrac{1}{2x+2}$

Então, o domínio de $(go f)(x)$ é:

$2x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq -2 \Leftrightarrow x \neq -1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Opção: D

⟵ Seja f e g duas funções. Então $(fog)(x) = f(g(x))$.

⟵ O denominador é diferente de zero.

38.

Qual é a inversa da função $f(x) = \dfrac{x+5}{x-2}$?

A. $\dfrac{x+2}{x-5}$ B. $\dfrac{x-2}{x+5}$ C. $\dfrac{2x+5}{x-1}$ D. $\dfrac{2x+5}{x-2}$

2012. 1ª época

【Resolução】

Substituindo $f(x)$ por y, tem-se: $y = \dfrac{x+5}{x-2}$.

Resolve-se em ordem a x:

$$y = \frac{x+5}{x-2} \Leftrightarrow (x-2)y = x+5 \Leftrightarrow xy - 2y = x+5$$

$$\Leftrightarrow xy - x = 2y + 5 \Leftrightarrow x(y-1) = 2y+5 \Leftrightarrow x = \frac{2y+5}{y-1}$$

Trocando as variáveis x por y e x por y, tem-se: $y = \dfrac{2x+5}{x-1}$,

que é a função inversa pedida, $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+5}{x-1}$

Opção: C

⟵ **Passos para obter a expressão da função inversa**

1. Substitui-se $f(x)$ por y.
2. Resolve-se em ordem a x.
3. Trocam-se as variáveis x por y e y por x.

39.

Qual é o conjugado de $z = (3+i) - (2+5i)$?

A. $\bar{z} = 1 - 4i$ B. $\bar{z} = 1 + 4i$ C. $\bar{z} = -4i$ D. $\bar{z} = (3+i) + (2+5i)$

2012. 1ª época

【Resolução】

$z = (3+i) - (2+5i) = 3 + i - 2 - 5i = 3 - 2 + i - 5i = 1 - 4i$

Por isso, o conjugado de $z = 1 - 4i$ é: $\bar{z} = 1 + 4i$.

Opção: B

⟵ $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

⟵ O conjugado de $z = a + bi$ é: $\bar{z} = a - bi$.

40.

Qual é a solução do integral $\int 3\,dx$?

A. $3x + c$ B. $\dfrac{1}{3}x + c$ C. $3 + c$ D. $\dfrac{1}{3} + c$

2012. 1ª época

【Resolução】

Deriva-se a função de cada opção para se encontrar a função cuja primeira dericada é 3.

A. $(3x+c)' = 3$ B. $\left(\dfrac{1}{3}x + c\right)' = \dfrac{1}{3}$

C. $(3+c)' = 0$ D. $\left(\dfrac{1}{3} + c\right)' = 0$

Na opção A, como $(3x+c)' = 3$, tem-se: $\int 3\,dx = 3x + c$

Opção: A

【Outra resolução】

$\int 3\,dx = 3x + c$

Definição da função primitiva:
Sejam $F(x)$ e $f(x)$ duas funções contínuas. A função $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ para qualquer x do domínio de $f(x)$ se a derivada de $F(x)$ é igual a $f(x)$. Isto é: $F'(x) = f(x)$.

Definição do integral indefinida:
Se $f(x)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, chama-se integral indefinida, à expressão $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ e c é uma constante.

Se $F'(x) = f(x)$, então $\int f(x)\,dx = F(x) + c$.

⟵Como $(kx+c)' = k$, $\int k\,dx = kx + c$.

FIM

República de Moçambique

Matemática	**Ministério da Educação**	**2ª Época**
12ª Classe / 2012	**Conselho Nacional de Exames, Certificação e Equivalências**	**120 Minutos**

Esta prova contém 40 perguntas com 4 alternativas de resposta para cada uma. Escolha a alternativa correcta e *RISQUE* a letra correspondente na sua folha de respostas. Responda a todas as primeiras 35 perguntas. As últimas 5 perguntas responda somente à da sua secção (Letras ou Ciências).

【Resolução】

1.

Qual é a proposição equivalente $\sim(a \vee b)$?

A. $a \vee b$ B. $\sim a \wedge \sim b$ C. $\sim a \vee \sim b$ D. $\sim(a \wedge b)$

2012. 2ª época

【Resolução】

Pelas primeiras leis de De Morgan, tem-se:

$\sim(a \vee b) = \sim a \wedge \sim b$

Opção: B

⟵ **Primeiras leis de De Morgan**:
Se p e q são duas proposições quaisquer, então:
★ $\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$; ★ $\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$

2.

Considere a seguinte tabela:
Quais são os valores de x, t e z, respectivamente?

A. VVV

B. VVF

C. FVF

D. VFV

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \Leftrightarrow q$
V	V	F	F	F	t
V	F	F	V	x	V
F	V	V	F	F	z
F	F	V	V	F	F

2012. 2ª época

【Resolução】

O valor de x é V porque V $\wedge$ V é V.
O valor de t é F porque F $\Leftrightarrow$ V é F.
O valor de z é V porque V $\Leftrightarrow$ V é V.

Opção: D

⟵ $p \wedge q$ só é V se ambas as proposições p e q são V.
⟵ $p \Leftrightarrow q$ só é V se ambas as prposições p e q têm o mesmo valor lógico.

3.

Qual é o valor de $\log_2 32 - \log_3\left(\frac{1}{27}\right) - 2\log_{32}\sqrt{32}$?

A. 1 B. 5 C. 7 D. 8

2012. 2ª época

【Resolução】

$$\log_2 32 - \log_3\left(\frac{1}{27}\right) - 2\log_{32}\sqrt{32}$$
$$= \log_2 2^{\mathbf{5}} - \log_3 3^{\mathbf{-3}} - 2\log_{32} 32^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}$$
$$= \mathbf{5} - (\mathbf{-3}) - 2 \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = 7$$

Opção: C

⟵ $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$; $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
⟵ $\log_a a^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{n}$

4.

Qual é a equação cujas raízes são $-\frac{7}{2}$ e 1?

A. $2x^2 + 5x - 7 = 0$ B. $2x^2 - 5x - 7 = 0$ C. $-2x^2 + 5x - 7 = 0$ D. $-2x^2 - 5x - 7 = 0$

2012. 2ª época

【Resolução】

A equação cujas raízes são $-\frac{7}{2}$ e 1 é dada por:

$k\left(x + \frac{7}{2}\right)(x - 1) = 0$, onde $k \in \mathbb{R}$

⟵ A equação cujas raízes são x_1 e x_2 é dada por: $k(x - x_1)(x - x_2) = 0$, onde $k \in \mathbb{R}$

Se $k = 2$, então a equação fica:

$2\left(x + \frac{7}{2}\right)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (2x+7)(x-1) = 0 \Leftrightarrow 2x^2+5x-7 = 0$

⟵ $(2x + 7)(x - 1) = 2x^2 - 2x + 7x - 7 = 2x^2 + 5x - 7$

Por isso, a solução é a opção A.

Opção: A

【Outra resolução】

Verifica-se se $-\frac{7}{2}$ e 1 são as raízes da equação da opção A a apartir do método de substituição:

⟵ Dada a equação $f(x) = 0$. Se $f(a) = 0$, então a é uma raíz da equação $f(x) = 0$.

Substituindo x por $-\frac{7}{2}$ na equação $2x^2 + 5x - 7 = 0$, tem-se:

$2 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) - 7 = \frac{49}{2} - \frac{35}{2} - 7 = \frac{14}{2} - 7 = 0$

⟵ Como $f\left(-\frac{7}{2}\right) = 0$, $-\frac{7}{2}$ é uma raíz da equação.

Substituindo x por 1 na equação $2x^2 + 5x - 7 = 0$, tem-se:

$2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 - 7 = 0$

⟵ Como $f(1) = 0$, 1 é uma raíz da equação.

Por isso, $-\frac{7}{2}$ e 1 são as raízes da equação $2x^2 + 5x - 7 = 0$ da opção A.

⟵ As equações das opções B, C e D não satisfazem $f\left(-\frac{7}{2}\right) = 0$ e $f(1) = 0$.

5.

Qual é a soma das raízes da equação $x^3 + 3x^2 - 4x = 0$?

A. -4 B. -3 C. 0 D. 1

2012. 2ª época

【Resolução】

Primeiro, calcula-se as raízes da equação:

$x^3 + 3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 3x - 4) = 0$

⟵ Coloca-se o factor comum x em evidência.

$\Leftrightarrow x(x + 4)(x - 1) = 0$

⟵ Factoriza-se x^2+3x-4 aplicando $x^2+(a+b)x+ab = 0$.

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -4 \vee x = 1$

Por fim, a soma das raízes da equação é: $0 + (-4) + 1 = -3$

Opção: B

6.

Considere a equação $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ k & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$. Qual é o valor de k?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2012. 2ª época

【Resolução】

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ k & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot2+1\cdot3\cdot k+1\cdot3\cdot2-(k\cdot1\cdot1+3\cdot1\cdot2+1\cdot2\cdot3)$$

⟵ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - (gec + dbi + ahf)$

$= 2 + 3k + 6 - (k + 6 + 6) = 2k - 4$

Por isso, tem-se: $2k - 4 = 4 \Leftrightarrow k = 4$

Opção: D

7.

Qual é o valor numérico da expressão $\dfrac{2}{2-\text{sen}30°}+\dfrac{3}{3+3\cos 60°}$?

A. $\dfrac{5}{3}$ B. $\dfrac{8}{3}$ C. 2 D. 8

2012. 2ª época

【Resolução】

$$\frac{2}{2-\text{sen}30°}+\frac{3}{3+3\cos 60°}=\frac{2}{2-\frac{1}{2}}+\frac{3}{3+3\cdot\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{2}{\frac{3}{2}}+\frac{3}{\frac{9}{2}}$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{6}{9}=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=\frac{6}{3}=2$$

Opção: C

θ	0°	30°	45°	60°	90°
senθ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tgθ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$
cotgθ	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

8.

Qual é a expressão simplificada de $\dfrac{1}{\cos x(\text{tg}x+1)}$?

A. $\dfrac{1}{\cos x+\text{sen}x}$ B. $\dfrac{1}{\cos x(\text{tg}x+1)}$ C. $\dfrac{1}{\cos x-\text{sen}x}$ D. $\dfrac{1}{2\cos x}$

2012. 2ª época

【Resolução】

$$\frac{1}{\cos x(\text{tg}x+1)}=\frac{1}{\cos x\cdot\mathbf{tg}\boldsymbol{x}+\cos x}$$
$$=\frac{1}{\cos x\cdot\frac{\mathbf{sen}\boldsymbol{x}}{\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}}+\cos x}$$
$$=\frac{1}{\text{sen}x+\cos x}=\frac{1}{\cos x+\text{sen}x}$$

Opção: A

⟵ **Fórmula**: $\mathbf{tg}\boldsymbol{x}=\dfrac{\mathbf{sen}\boldsymbol{x}}{\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}}$; $\text{cotg}x=\dfrac{1}{\text{tg}x}=\dfrac{\cos x}{\text{sen}x}$

9.

Que valores, k pode tomar, para que a equação $|3x-2|=4-k$ <u>NÃO</u> tenha solução?

A. $k\in]-\infty;4]$ B. $k\in]-\infty;4[$ C. $k\in]4;+\infty[$ D. $k\in[4;+\infty[$

2012. 2ª época

【Resolução】

Como $|3x-2|\geq 0$, para que a equação $|3x-2|=4-k$ não tenha solução, é necessário que: $4-k<0$

⟵ O módulo de qualquer número real é sempre maior igual a 0, isto é, $\forall x\in\mathbb{R}, |x|\geq 0$.

Resolve-se a inequação $4-k<0$:

$$4-k<0\Leftrightarrow -k<-4\Leftrightarrow k>4\Leftrightarrow k\in]4;+\infty[$$

⟵ Se multiplicar pelo número negativo ambos os membros da inequação, então o sinal de desigualdade muda de sentido.

Opção: C

10.

Qual é a solução da inequação $|3+x|\geq 2$?

A. $]-\infty;-5]\cup[-1;+\infty[$ B. $]-\infty;-5[\cup]-1;+\infty[$ C. $[-5;-1]$ D. $\mathbb{R}$

2012. 2ª época

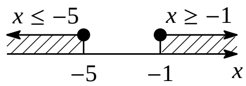
【Resolução】

$$|3+x|\geq 2\Leftrightarrow 3+x\geq 2\ \vee\ 3+x\leq -2$$
$$\Leftrightarrow x\geq -1\ \vee\ x\leq -5$$
$$\Leftrightarrow x\in]-\infty;-5]\ \cup\ [-1;+\infty[$$

Opção: A

⟵ **Inequações modulares**: $\star|x|\geq a\Leftrightarrow x\geq a\vee x\leq -a$

$\star|x|\leq a\Leftrightarrow x\leq a\wedge x\geq -a$

⟵ 

11.

Sendo $A_n^2 = 110$, $n > 2$, qual é o valor de n?

A. $\{-10; 11\}$ B. $\{-11; 10\}$ C. $\{-10\}$ D. $\{11\}$

2012. 2ª época

【**Resolução**】

$A_n^2 = 110 \Leftrightarrow n(n-1) = 110 \Leftrightarrow n^2 - n = 110$

$\Leftrightarrow n^2 - n - 110 = 0 \Leftrightarrow (n-11)(n+10) = 0$

$\Leftrightarrow n = 11 \;\vee\; n = -10$

Como $n > 2$, tem-se: $n = 11$

Opção: D

⟵ $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = \overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}^{p \text{ factores}}$

⟵ Factoriza-se $n^2 - n - 110$ aplicando $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

⟵ $n = -10$ não satisfaz a condição $n > 2$.

12.

Qual é a expressão equivalente a $\dfrac{n! + (n+1)!}{(n-1)!}$?

A. $n^2 + 2n$ B. $n^2 - 2n$ C. $\dfrac{n^2+n}{2}$ D. $\dfrac{n+1}{n-1}$

2012. 2ª época

【**Resolução**】

$$\frac{n! + (n+1)!}{(n-1)!} = \frac{n\mathbf{(n-1)!} + (n+1)n\mathbf{(n-1)!}}{(n-1)!}$$

$$= \frac{\cancel{\mathbf{(n-1)!}} \cdot [n + (n+1)n]}{\cancel{(n-1)!}}$$

$$= n + (n+1)n = n + n^2 + n = n^2 + 2n$$

Opção: A

⟵ $n! = n\mathbf{(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} = n \cdot \mathbf{(n-1)!}$;
$(n+1)! = (n+1)n\mathbf{(n-1)\cdots 2 \cdot 1} = (n+1)n\mathbf{(n-1)!}$

⟵ Coloca-se o factor comum $(n-1)!$ em evidência.

13.

De quantas maneiras diferentes três amigos podem se posicionar numa fila para tirar uma fotografia?

A. 3 B. 6 C. 9 D. 12

2012. 2ª época

【**Resolução**】

Deseja-se o número total das maneiras diferentes de permutar 3 elementos numa fila. Então trata-se de uma permutação de 3 elementos, isto é: $P_3 = 3! = 6$

Opção: B

⟵ $P_n = n!$ é o numero total das maneiras de permutar n elementos numa fila.
Calcula-se: $P_n = n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$

14.

Uma bola é retirada de uma sacola contendo 5 bolas verdes e 7 amarelas. Qual é a probabilidade da bola retirada ser de cor verde?

A. $\dfrac{1}{12}$ B. $\dfrac{1}{7}$ C. $\dfrac{1}{5}$ D. $\dfrac{5}{12}$

2012. 2ª época

【**Resolução**】

Como $5+7 = 12$, então esta sacola contém um total de 12 bolas.

Então, o número de casos possíveis é C_{12}^1 porque retira-se 1 bola dentre 12 bolas.

O número de casos favoráveis é C_5^1 porque retira-se 1 bola verde dentre 5 bolas verdes.

Portanto, a probabilidade pedida é:

$$\frac{C_5^1}{C_{12}^1} = \frac{5}{12}$$

Opção: D

⟵ Escolhe-se 1 elemento dentre 12 elementos $\Longrightarrow C_{12}^1$

⟵ Escolhe-se 1 elemento dentre 5 elementos $\Longrightarrow C_{12}^1$

⟵ A probabilidade de um acontecimento A é dada por:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

⟵ $C_n^1 = n$

15.
Qual é o termo geral da sucessão $1; -5; -11; -23; \ldots$?

A. $a_n = 6n - 5$ B. $a_n = 7 - 6n$ C. $a_n = 6n + 75$ D. $a_n = -6n$

2012. 2ª época

【**Resolução**】
Considerando os três primeiros termos da sucessão dada:
Como a diferença entre dois termos consecutivos é constante -6, esta sucessão é uma PA em que $a_1 = 1$ e $d = -6$.
Então, o termo geral desta PA é dado por:

$$a_n = 1 + (n-1)\cdot(-6) = -6n + 7 = 7 - 6n$$

Opção: B

Depois do 3° termo, para que a sucessão dada seja uma PA é necessário acrescentar o 4° termo -17, sem o qual nenhuma das opções dadas é solução.

⟵ $1, \quad -5, \quad -11, \quad \ldots$
$\quad -6 \quad -6 \quad -6$

⟵ O termo geral de uma **PA** é $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$.
O termo geral de uma **PG** é $\boldsymbol{a_n = a_1 q^{n-1}}$.

16.
Qual é a ordem do termo 4 na sucessão dada por $a_n = 2n - 6$?

A. 2 B. 3 C. 5 D. 6

2012. 2ª época

【**Resolução**】
Resolve-se a equação $a_n = 4$:

$$a_n = 4 \Leftrightarrow 2n - 6 = 4 \Leftrightarrow 2n = 10 \Leftrightarrow n = 5$$

Opção: C

⟵ a_n significa o termo da ordem n.
Então, a solução da equação $a_n = 4$ é a ordem do termo 4.

17.
Os extremos de uma progressão aritmética de 5 termos são 1 e 13. Qual é a soma de todos os termos dessa sucessão?

A. 7 B. 14 C. 35 D. 70

2012. 2ª época

【**Resolução**】
Pela condição, tem-se: $a_1 = 1$ e $a_5 = 13$
Então, a soma de todos os termos desta PA é:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Leftrightarrow S_5 = \frac{5(1+13)}{2} = 35$$

Opção: C

⟵ A soma dos n primeiros termos é dada por;
$S_n = \dfrac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$ ou $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$

18.
Quais são os três primeiros termos de uma progressão geométrica em que o sétimo termo é 192 e o segundo é 6?

A. $1; 6; 36$ B. $3; 6; 9$ C. $2; 6; 10$ D. $3; 6; 12$

2012. 2ª época

【**Resolução**】
Pela condição tem-se: $a_7 = 192$ e $a_2 = 6$
Como $a_n = a_1 q^{n-1}$, tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_1 q^6 = 192 \Leftrightarrow \boldsymbol{a_1 q} \cdot q^5 = 192 \cdots ① \\ \boldsymbol{a_1 q} = 6 \cdots ② \end{cases}$$

Substituindo ② em ①, tem-se:

$$6q^5 = 192 \Leftrightarrow q^5 = 32 \Leftrightarrow \boldsymbol{q^5 = 2^5 \Leftrightarrow q = 2}$$

Substituindo q por 2 em ②, tem-se: $a_1 \cdot 2 = 6 \Leftrightarrow a_1 = 3$
Portanto, o termo geral desta PA é: $a_n = a_1 q^{n-1} \Leftrightarrow a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
Logo, tem-se: $a_3 = 3 \cdot 2^{3-1} = 3 \cdot 4 = 12$
Portanto, os três primeiros termos são $3; 6; 12$.

Opção: D

⟵ O termo geral de uma PG é dado por $a_n = a_1 q^{n-1}$

⟵ Numa igualdade de duas potências com mesmo expoente ímpar iguala-se as bases, isto é, se m é um número ímpar, então $a^m = b^m \Leftrightarrow a = b$.

Numa igualdade de duas potências com mesmo expoente par iguala-se as bases, isto é, se m é um número par, então $a^m = b^m \Leftrightarrow a = \pm b$.

19.

Qual é o valor da soma $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots$?

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. ∞

2012. 2ª época

【**Resolução**】

Isto é a soma de todos os termos de uma PG em que $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{3}$.

Como $|q| < 1$, a soma de todos os termos desta PG é:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Opção: C

⟵ $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$

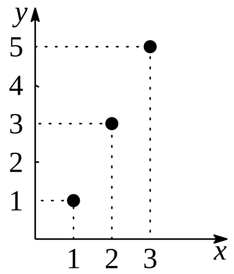
$\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{3}$

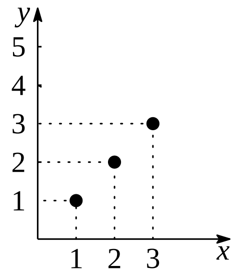
⟵ A soma de todos os termos de uma PG em que $|q| < 1$ é dada por: $S = \frac{a_1}{1 - q}$.

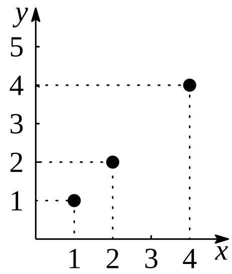
20.

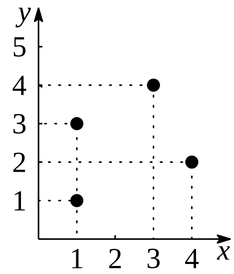
Dados os conjuntos $M = \{1; 2; 3\}$ e $N = \{1; 3; 4; 5\}$ e a relação $R = \{(x; y) \in M \times N : y = 2x - 1\}$

Qual dos gráficos representa a relação R?

A. 

B. 

C. 

D. 

2012. 2ª época

【**Resolução**】

Se $x = 1$, então $y = 2 \cdot 1 - 1 = 1$.

Logo, o gráfico da relação R passa pelo ponto $(1; 1)$.

Se $x = 2$, então $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.

Logo, o gráfico da relação R passa pelo ponto $(2; 3)$.

Se $x = 3$, então $y = 2 \cdot 3 - 1 = 5$.

Logo, o gráfico da relação R passa pelo ponto $(3; 5)$.

Por isso, a opção A representa a relação R.

Opção: A

⟵ Substitui-se x por 1 em $y = 2x - 1$.

⟵ Se $f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$, então o gráfico da função $y = f(x)$ passa pelo ponto $(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b})$.

⟵ Substitui-se x por 3 em $y = 2x - 1$.

⟵ Apenas o gráfico da opção A passa pelos três pontos $(1; 1)$, $(2; 3)$ e $(3; 5)$.

21.

Na função $f(x) = ax + b$ sabe-se que $f(-2) = 8$ e $f(-1) = 2$. Quais são os valores de a e b?

A. $a = -4; b = -6$ B. $a = -6; b = -4$ C. $a = 6; b = 4$ D. $a = 4; b = 6$

2012. 2ª época

【**Resolução**】

Calcula-se $f(-2)$ e $f(-1)$:

$$f(-2) = a \cdot (-2) + b = -2a + b$$
$$f(-1) = a \cdot (-1) + b = -a + b$$

Como $f(-2) = 8$ e $f(-1) = 2$, tem-se o sistema seguinte:

$$\begin{cases} -2a + b = 8 \cdots ① \\ -a + b = 2 \cdots ② \end{cases}$$

Calculando ① − ②, tem-se: $-a = 6 \Leftrightarrow a = -6$

Substituindo a por -6 na equanção ②, tem-se:

$$-(-6) + b = 2 \Leftrightarrow b = -4$$

Opção: B

⟵ Substitui-se x por -2 em $f(x) = ax + b$.

⟵ Substitui-se x por -1 em $f(x) = ax + b$.

$$\begin{array}{rrcrcr} & -2a & + & b & = & 8 \\ -) & -\ a & + & b & = & 2 \\ \hline & -\ a & & & = & 6 \end{array}$$

22.

Qual é o contradomínio da função $f(x) = (x-1)(x-5)$ definida sobre o domínio $D = \{1; 2; 3; 4; 5\}$?

A. $CD = \{-4; -3; 0\}$ B. $CD = \{-4; 0; 3\}$ C. $CD = \{0; 3; 4\}$ D. $CD = \{4; 3; 0\}$

2012. 2ª época

【Resolução】

Calcula-se $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ e $f(5)$:

$f(1) = (1-1)(1-5) = 0 \cdot (-4) = 0$ ⟵ Substuitui-se x por 1 em $f(x) = (x-1)(x-5)$.

$f(2) = (2-1)(2-5) = 1 \cdot (-3) = -3$ ⟵ Substuitui-se x por 2 em $f(x) = (x-1)(x-5)$.

$f(3) = (3-1)(3-5) = 2 \cdot (-2) = -4$ ⟵ Substuitui-se x por 3 em $f(x) = (x-1)(x-5)$.

$f(4) = (4-1)(4-5) = 3 \cdot (-1) = -3$ ⟵ Substuitui-se x por 4 em $f(x) = (x-1)(x-5)$.

$f(5) = (5-1)(5-5) = 4 \cdot 0 = 0$

Por isso, tem-se: $CD = \{-4; -3; 0\}$ ⟵ Ao conjunto das imagens chama-se contradomínio e representa-se por CD.

Opção: A

Observação: As opções C e D dadas são iguais.

23.

Qual é o valor de $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$?

A. 0 B. $\dfrac{1}{4}$ C. 1 D. $\sqrt{2}$

2012. 2ª época

【Resolução】

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}$$

⟵ Multiplica-se pelo conjugado $\sqrt{x+2}+2$ de $\sqrt{x+2}-2$.

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$

⟵ $(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2) = \left(\sqrt{x+2}\right)^2 - 2^2 = (x+2)-4$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

⟵ Substitui-se x por 2.

Opção: B

24.

Qual é o valor de $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{5x^2-2x}{-3x^4+2x^3-x^2}$?

A. $-\dfrac{5}{3}$ B. $-\dfrac{3}{5}$ C. 0 D. $+\infty$

2012. 2ª época

【Resolução】

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{5x^2-2x}{-3\boldsymbol{x^4}+2x^3-x^2} = \left[-\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{5x^2-2x}{\boldsymbol{x^4}}}{\frac{-3x^4+2x^3-x^2}{\boldsymbol{x^4}}}$$

⟵ Para levantar a indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ou $-\frac{\infty}{\infty}$, divide-se o numerador e o denominador pela potência máxima.
Neste caso, como o denominador é do 4° grau, divide-se o numerador e o denominador por $\boldsymbol{x^4}$.

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{5}{x^2} - \frac{2}{x^3}}{-3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{0-0}{-3+0-0} = 0$$

Opção: C

【Outra resolução】

Como o grau do denominador é maior que o grau do numerador, tem-se:

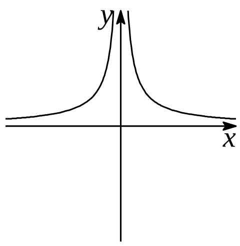
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{5x^2-2x}{-3x^4+2x^3-x^2} = 0$$

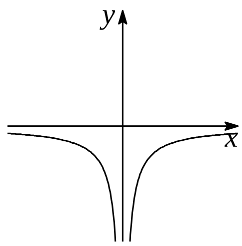
⟵ Se o grau do denominador é maior que o grau do numerador, então o limite quando $x \to \infty$ é zero.

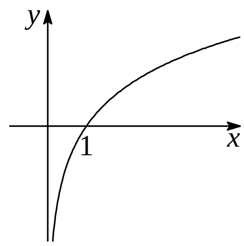
25.

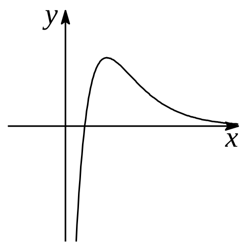
De uma função sabe-se que: O domínio de f é $\mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

Qual dos gráficos pode ser o gráfico de f?

A. 

B. 

C. 

D. 

★2012. 2ª época

【Resolução】

Determina-se o domínio, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ de cada função dos gráficos das opções dadas:

A. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

B. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

C. $D_f = \mathbb{R}^+$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

D. $D_f = \mathbb{R}^+$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Por isso, não há nenhuma solução correcta.

Opção: Nenhuma

Observação:

Para que haja solução, é necessário que a última condição dada $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ passe para $\lim\limits_{x\to \mathbf{0^+}} f(x) = -\infty$.

A solução seria a opção D.

Ou:

A primeira condição dada o domínio de f é $\mathbb{R}^+$ passe para o domínio de f é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. A solução seria a opção B.

⟵ Como a recta $x = 0$ é uma AV, então $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Como quando $x \to +\infty$, $f(x)$ se aproxima de 0, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

⟵ Como o gráfico coloca-se à direita do eixo das ordenadas, $D_f = \mathbb{R}^+$. Como quando $x \to +\infty$, $f(x)$ tende para $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$.
Como $\nexists \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, então $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

26.

Qual é o valor de m de modo que a função $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & \text{se } x \le 1 \\ 2x + m, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ seja contínua no ponto $x = 1$?

A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

2012. 2ª época

【Resolução】

Para que a função seja contínua em $x = 1$, é necessário que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

O limite lateral de $f(x)$ à esquerda de $x = 1$ é:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (-x^2 + 1) = -1^2 + 1 = \mathbf{0}$$

O limite lateral de $f(x)$ à direita de $x = 1$ é:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x + m) = 2 \cdot 1 + m = \mathbf{2 + m}$$

O valor de $f(x)$ no ponto $x = 1$ é: $f(1) = 2 \cdot 1 + m = \mathbf{2 + m}$

Como estes são iguais, tem-se: $\mathbf{2 + m = 0} \Leftrightarrow m = -2$

Opção: A

⟵ $f(x)$ é contínua no ponto de abcissa $x = a$
$\Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
$\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

⟵ Quando $x \to 1^-$, isto é, $x < 1$, $f(x) = -x^2 + 1$.

⟵ Quando $x \to 1^+$, isto é, $x > 1$, $f(x) = 2x + m$.

⟵ Quando $x = 1$, $f(x) = 2x + m$.

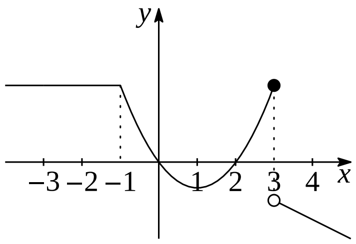
27.
Considere o gráfico da função $f(x)$ representado na figura:
Quais são as abcissas dos pontos em que a função não é derivável?

A. -1 e 0

B. 0 e 2

C. -1 e 3

D. 2 e 3

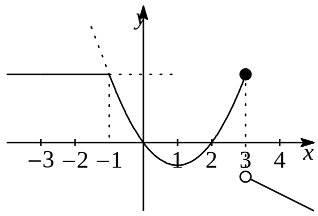


2012. 2ª época

【Resolução】

Observando o gráfico, é claro que os declives das rectas da esquerda e da direita do ponto $x = -1$ são diferentes.
Como os declives das rectas da esquerda e da direita do ponto $x = 0$ são iguais a $f'(-1^-)$ e $f'(-1^+)$ respectivamente, tem-se: $f'(-1^-) \neq f'(-1^+)$.
Por isso, a função $f(x)$ não é derivável no ponto $x = -1$.
Como a função $f(x)$ é descontínua no ponto $x = 3$, a função $f(x)$ não é derivável no ponto $x = 3$.
Por isso, a função não é derivável nos pontos $x = -1$ e $x = 3$.

Opção: C



⟵**Em geral, o ponto anguloso não é derivável.**

⟵Se uma função $f(x)$ é descontínua no ponto $x = a$, então a função $f(x)$ não é derivável nesse ponto.

28.
Qual é a primeira derivada da função $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 1)$?

A. $2x^2$ B. $4x^3$ C. $x^2 + 1$ D. $4(x^3 + x^2)$

2012. 2ª época

【Resolução】

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(x^2+1)(x^2-1)]' \\ &= (x^2+1)'(x^2-1) + (x^2+1)(x^2-1)' \\ &= 2x(x^2-1) + (x^2+1)\cdot 2x \\ &= 2x^3 - 2x + 2x^3 + 2x = 4x^3 \end{aligned}$$

Opção: B

⟵ **Derivada do produto de duas funções**:
$\star [f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x) + g'(x)$

⟵ $(x^2 + 1)' = 2x$ porque $\forall n \in \mathbb{R}, (x^n)' = nx^{n-1}$ e $\forall k \in \mathbb{R}, (k)' = 0$.

【Outra resolução】

$f(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 1) = x^4 - 1$
Então, tem-se: $f'(x) = (x^4 - 1)' = 4x^3$

⟵ $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
⟵ $(x^4)' = 4x^{4-1} = 4x^3$; $(1)' = 0$

29.
Qual é a primeira derivada da função $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$?

A. e^x B. $\dfrac{e^x - x}{x^2}$ C. $\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ D. $\dfrac{e^x - 1}{x^2}$

2012. 2ª época

【Resolução】

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{(e^x)'\cdot x - e^x \cdot (x)'}{x^2}$$
$$= \frac{\boldsymbol{e^x} x - \boldsymbol{e^x}}{x^2} = \frac{\boldsymbol{e^x}(x-1)}{x^2}$$

Opção: C

⟵ **Derivada do quociente de duas funções**:
$\star \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
⟵ $\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$; $(x)' = 1$

30.

Sendo $f(x) = \sqrt{2x^4+2}$, qual é o valor de $f'(1)$?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2012. 2ª época

【**Resolução**】

Calcula-se $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\sqrt{2x^4+2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{2x^4+2}} \cdot (2x^4+2)'$$

$$= \frac{\cancel{2}\cdot 4x^3}{\cancel{2}\sqrt{2x^4+2}} = \frac{4x^3}{\sqrt{2x^4+2}}$$

Logo, tem-se: $f'(1) = \dfrac{4\cdot 1^3}{\sqrt{2\cdot 1^4+2}} = \dfrac{4}{\sqrt{4}} = \dfrac{4}{2} = 2$

Opção: B

$\longleftarrow \left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$ porque $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$\longleftarrow (2x^4 + \mathbf{2})' = 2\cdot \mathbf{4x^3} + \mathbf{0}$

$\longleftarrow$ Substitui-se x por 1 em $f'(x) = \dfrac{4x^3}{\sqrt{2x^4+2}}$

31.

Qual é a primeira derivada de $f(x) = \ln(x^2-1)$?

A. $2\ln(x^2-1)$ B. $\ln(2x)$ C. $\dfrac{2x}{\ln(x^2-1)}$ D. $\dfrac{2x}{x^2-1}$

2012. 2ª época

【**Resolução**】

$$f'(x) = [\ln(x^2-1)]' = \frac{(x^2-1)'}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2-1}$$

Opção: D

$\longleftarrow [\ln f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ porque $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

$(x^2-1)' = 2x - 0 = 2x$.

32.

Qual é a segunda derivada de sen$x$?

A. $-\cos x$ B. $-$sen$x$ C. sen$x$ D. $\cos x$

2012. 2ª época

【**Resolução**】

Seja $f(x) = \text{sen}x$.

Então, a primeira derivada de $f(x)$ é: $f'(x) = (\text{sen}x)' = \cos x$

Logo, a segunda derivada de $f(x)$ é: $f''(x) = (\cos x)' = -\text{sen}x$

Opção: B

$\longleftarrow$ **Derivada da função seno**: $(\text{sen}x)' = \cos x$

$\longleftarrow$ **Derivada da função co-seno**: $(\cos x)' = -\text{sen}x$

★ A segunda derivada de $f(x)$ é a derivada da primeira derivada de $f(x)$, isto é, $f''(x) = [f'(x)]'$.

33.

A diferença entre dois números é 4. Quais são esses números se o produto dos mesmos for mínimo?

A. -2 e 2 B. 0 e 4 C. -6 e -2 D. 4 e 8

★2012. 2ª época

【**Resolução**】

Sejam x e y dois números cuja diferença é 4.

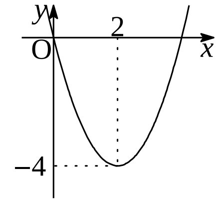
Então, tem-se: $x - y = 4 \Leftrightarrow y = x - 4$

Seja p o produto dos dois números. Então tem-se:

$$p = x\cdot y = x(x-4) = x^2 - 4x$$

Fazendo o quadrado perfeito, tem-se: $p = (x-2)^2 - 4$

Como a função $p = (x-2)^2 - 4$ é quadrática, então o seu gráfico é uma parabola que tem vértice $(2;-4)$ e tem a concavidade virada para cima como a figura mostra.



Por isso, para $x = 2$, p é mínimo.

Logo, $y = 2 - 4 = -2$.

Portanto os números pedidos são -2 e 2.

Opção: A

$\longleftarrow$ Quadrado perfeito: $x^2 + bx = \left(x + \dfrac{b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2}\right)^2$

$\longleftarrow$ As coordenadadas do vértice da função quadrática $y = a(x-p)^2 + q$ são dadas por $(p;q)$.

Se $a > 0$, então a parábola tem a concavidade virada para cima e se $a < 0$, então tem a concavidade virada para baixo.

$\longleftarrow$ Substitui-se x por 2 em $y = x - 4$ para ter o valor de y.

【**Outra resolução**】

Seja $p(x)$ o produto dos dois números x e y cuja diferença é 4.

Então $p(x) = x \cdot y = x(x-4) = x^2 - 4x$.

⟵ Como a diferença dos dois números x e y é 4, então $x - y = 4 \Leftrightarrow y = x - 4$.

Calcula-se o mínimo da função $p(x)$.

Como $p'(x) = 2x - 4$, o zero da derivada da função $p(x)$ é:

$$2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

⟵ $(x^2 - 4)' = 2x - 4$

⟵ Há possibilidade de ter um extremo no ponto $x = 2$.

Constroi-se a tabela de monotonia e extremos:

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$p'(x)$	$-$	0	$+$
$p(x)$	↘	Mín	↗

⟵ Se $p'(x) < 0$, então $p(x)$ é decrescente.
Se $p'(x) > 0$, então $p(x)$ é crescente.
Se $p'(x) = 0$, então $p(x)$ é constante.

A partir da tabela, a função $p(x)$ tem o mínimo no ponto $x = 2$.

Logo, $y = 2 - 4 = -2$. Portanto os números pedidos são -2 e 2.

34.

Qual é a equação da recta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x + 5$ em $x = 2$?

A. $x - 3y + 11 = 0$ B. $9x - y + 11 = 0$ C. $9x + y - 11 = 0$ D. $9x - y - 11 = 0$

2012. 2ª época

【**Resolução**】

Sabe-se que o valor de $f'(2)$ é igual ao declive da recta tangente ao gráfico de $f(x)$ em $x = 2$.

⟵ O valor de $f'(a)$ é igual ao declive da recta tangente ao gráfico de $f(x)$ em $x = a$.

Como $f'(x) = 3x^2 - 3$, então $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9$.

⟵ $f'(x) = (x^3 - 3x + 5)' = 3x^2 - 3 \cdot +0 = 3x^2 - 3$

Logo, o declive da recta tangente é 9.

Como $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 5 = 7$, o gráfico da recta tangente passa pelo ponto $(2; 7)$.

⟵ Se $f(a) = b$, então o gráfico da função de $y = f(x)$ passa pelo ponto $(a; b)$.

Por isso, a equação da recta tangente é:

$$y - 7 = 9(x - 2) \Leftrightarrow y = 9x - 11 \Leftrightarrow 9x - y + 11 = 0$$

Opção: B

35.

Em que intervalo a função $f(x) = x^3 - 12x$ é decrescente?

A. $]-\infty; 12[$ B. $]12; +\infty[$ C. $[-2; 2]$ D. $]-2; 2[$

2012. 2ª época

【**Resolução**】

Calcula-se: $f'(x) = 3x^2 - 12$

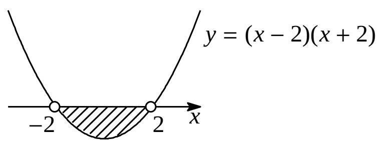
⟵ $(x^3 - 12x)' = 3x^2 - 12 \cdot 1 = 3x^2 - 12$

Para que $f(x)$ seja decrescente num intervalo, é necessário que $f'(x) < 0$ nesse intervalo.

⟵ Se $f'(x) > 0$, então $f(x)$ é crescente.
Se $f'(x) < 0$, então $f(x)$ é decrescente.

Resolve-se a inequação $f'(x) < 0$:

$$3x^2 - 12 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) < 0$$
$$\Leftrightarrow -2 < x < 2$$

⟵ 

Por isso, conclui-se que $f(x)$ é decrescente em $]-2; 2[$.

Opção: D

【**Outra resolução**】

Calcula-se os zeros de $f'(x)$:

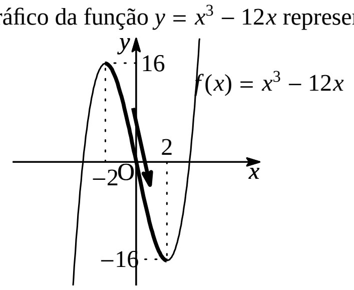
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

Constroi-se a tabela de monotonia e extremos:

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	Máx	↘	Mín	↗

A partir da tabela, couclui-se que $f(x)$ é decrescente em $]-2; 2[$.

O gráfico da função $y = x^3 - 12x$ representa-se:



Somente para a Secção de Letras

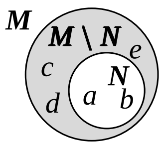
36.
Sendo $M = \{a; b; c; d; e\}$ e $N = \{a; b\}$, a que é igual o conjunto $M \setminus N$?

A. $\{a; b; c; d; e\}$ B. $\{c; d; e\}$ C. $\{a; b; e\}$ D. $\{a; b; c; d; e\}$

2012. 2ª época

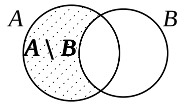
【Resolução】
A diferença de M e N é:

$$M \setminus N = \{c; d; e\}$$



Opção: B

⟵ $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\}$



37.
Sendo M e N dois conjuntos definidos no universo U, qual é a opção equivalente a $\overline{M} \cap (M \cup N)$?

A. U B. $\emptyset$ C. $\overline{M} \cup N$ D. $\overline{M} \cap N$

2012. 2ª época

【Resolução】

$$\begin{aligned}\overline{M} \cap (M \cup N) &= (\overline{M} \cap M) \cup (\overline{M} \cap N)\\ &= \emptyset \cup (\overline{M} \cap N)\\ &= \overline{M} \cap N\end{aligned}$$

Opção: D

⟵ **Lei Distributiva**: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
⟵ **Lei do Complementar**: $A \cap \overline{A} = \emptyset$
⟵ **Lei de Identidade**: $\emptyset \cup A = A$

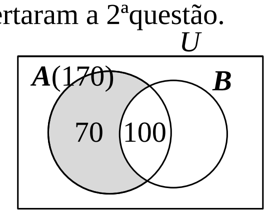
38.
Um exame continha apenas duas questões. Sabe-se que 100 examinandos acertaram as duas questões e 170 acertaram a primeira questão. Quantos examinandos acertaram somente a primeira questão?

A. 30 B. 70 C. 270 D. 365

2012. 2ª época

【Resolução】
Sejam:
U- Conjunto dos examinados;
A - Conjunto dos examinados que acertaram a 1ªquestão;
B - Conjunto dos examindados que acertaram a 2ªquestão.
Então pode-se construir o diagrama de Venn como a figura mostra.
Os examinados que acertaram somente a 1ª questão são:

$$170 - 100 = 70$$



Opção: B

⟵ Nota-se que:
$n(A \cap B) = 100$ e $n(A) = 170$

⟵ 170 examindados acertaram a 1ª questão e 100 acertaram as duas questões.

39.
Qual é a abcissa do vértice do gráfico da função $g(x) = x^2 - 2x$?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2012. 2ª época

【Resolução】
Fazendo quadrado perfeito, tem-se:

$$g(x) = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1^2 = (x - \mathbf{1})^2 - 1$$

Por isso, a abcissa do vértice da função $f(x) = x^2 - 2x$ é **1**.

Opção: A

⟵ **Quadrado perfeito**: $x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$
⟵ As abcissas do vértice do gráfio de uma função $y = (x - \boldsymbol{p})^2 + \boldsymbol{q}$ são $(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{q})$.

【**Outra resolução**】

Pela fórmula, a abcissa do vértice do gráfico da função $g(x) = x^2 - 2x$ é: $-\dfrac{-2}{2 \cdot 1} = 1$

⟵ Dada a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$. Então, as coordenadas do vértice são $\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

【**Outra resolução**】

Calcula-se os zeros da função $g(x)$:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

Então, o ponto médio dos dois zeros é: $\dfrac{0+2}{2} = 1$

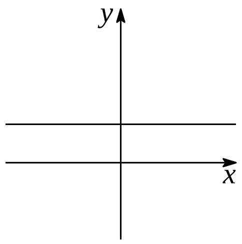
⟵ O ponto médio entre os dois pontos $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ é dado por $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

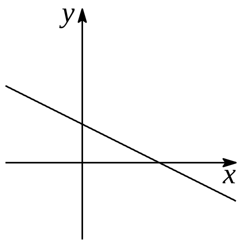
Porisso, a abcissa do vértice do gráfico da função $g(x) = x^2 - 2x$ é 1.

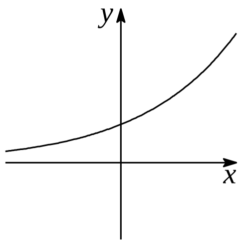
⟵ Sejam x_1 e x_2 os zeros da função qudrática. Então, a abcissa do vértice da função é $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

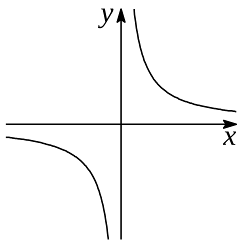
40.

Qual das funções é sobrejectiva?

A. 

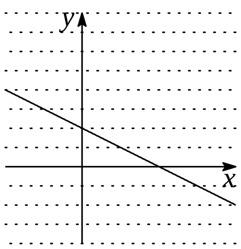
B. 

C. 

D. 

2012. 2ª época

【**Resolução**】



O gráfico da função da opção B representa uma função bijectiva porque cada uma das rectas paralelas ao eixo das ordenadas corta o gráfico em um só ponto.

Como a função da opção B é bijectiva, então é sobrejectiva.

A função da opção A não é injectiva nem sobrejectiva.

A funções da opções C e D são injectivas mas não são sobrejectivas.

⟵ ⋆Se cada uma das rectas palalelas ao eixo de xx cortar o gráfico em um só ponto ou não cortar o gráfico de uma função, então a função é **injectiva**.

⋆Se cada uma das rectas palalelas ao eixo de xx cortar o gráfico uma função em um ou mais pontos, então a função é **sobrejectiva**.

⋆Se cada uma das rectas palalelas ao eixo de xx cortar o gráfico uma função em um só ponto , então a função é **bijectiva**. (Se uma função for simultaneamente injectiva e sobrejectiva, a função é bijectiva.)

Opção: B

【**Outra resolução**】

Das opções dadas, só a função da opção B tem o contradomínio $\mathbb{R}$. Por isso, a função da opção B é sobrejectiva.

⟵ O contradomínio de uma função sobrejectiva é $\mathbb{R}$.

Somente para a Secção de Ciências

36.

Qual é a equação geral da recta que passa pelo ponto P(−3; 2) e tem coeficiente angular igual a 2?

A. $2x + y + 6 = 0$ B. $x + 2y + 2 = 0$ C. $2x - y + 8 = 0$ D. $x - 2y + 6 = 0$

2012. 2ª época

【**Resolução**】

A equação geral da recta que passa pelo ponto P(−3; 2) e tem coeficiente angular igual a 2 é dada por:

$$y - 2 = 2[x - (-3)] \Leftrightarrow y = 2x + 8 \Leftrightarrow 2x - y + 8 = 0$$

Opção: C

⟵ A equação da recta que passa pelo ponto $(x_1; y_1)$ e tem coeficiente angular igual a m é dada por:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

37.

Seja $f(x) = x^3$ com $x \in \mathbb{R}$. Qual é o valor de $f^{-1}(8)$?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2012. 2ª época

【**Resolução**】

Calcula-se a iversa da função $f(x) = x^3$:

Substituindo $f(x)$ por y, tem-se: $y = x^3$

Resolvendo em ordem a x, tem-se:

$$x^3 = y \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

Trocando as variáveis x por y e y por x, tem-se $y = \sqrt[3]{x}$, que é a função inversa, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Então, tem-se: $f^{-1}(8) = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

Opção: B

【**Resolução**】

Como $f(2) = 2^3 = 8$, então $f^{-1}(8) = 2$.

Passos para obter a expressão da função inversa

1. Substitui-se $f(x)$ por y.
2. Resolve-se em ordem a x.
3. Trocam-se as variáveis x por y e y por x.

⟵ $y^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{y}$ aplicando $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

⟵ Substitui-se x por 8 em $f^{-1} = \sqrt[3]{x}$.
$\sqrt[3]{2^3} = 3$ aplicando $\sqrt[n]{a^n} = a$.

⟵ Se $f(a) = b$, então $f^{-1}(b) = a$.

38.

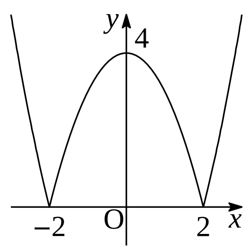
Qual é a expressão analítica da função cujo gráfico está representado na figura?

A. $y = |x^2 - 2|$

B. $y = |x^2| - 4$

C. $y = |x^2 - 4|$

D. $y = |x^2| - 4$

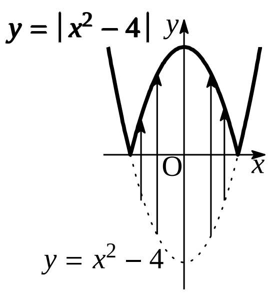


2012. 2ª época

【**Resolução**】

O gráfico obtém-se a partir do gráfico de $y = x^2 - 4$, passando os pontos de ordenada negativa do gráfico para cima do eixo das abcissas.

Por isso, a expressão analítica da função cujo gráfico está representado na figura é $y = |x^2 - 4|$.



Opção: C

⟵ O gráfico da função $y = |f(x)|$ obtém-se a partir do gráfico de $y = f(x)$, passando os pontos de ordenada negativa do gráfico para cima do eixo das abcissas.

O gráfico de uma função $y = f(|x|)$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = f(x)$ através da simetria em relação ao eixo das ordenadas, representando os pontos que estão à direita do eixo das ordenadas à esquerda do mesmo eixo.

39.

Qual é a solução $\int (e^x - 1)dx$?

A. $e^x - 1 + c$ B. $e^x + 1 + c$ C. $e^x + x + c$ D. $e^x - x + c$

2012. 2ª época

【**Resolução**】

Deriva-se a função de cada opção para se encontrar a função cuja primeira derivada é $e^x - 1$.

A. $(e^x - 1 + c)' = e^x$

B. $(e^x + 1 + c)' = e^x$

C. $(e^x + x + c)' = e^x + 1$

D. $\boldsymbol{(e^x - x + c)' = e^x - 1}$

Como $\boldsymbol{(e^x - x + c)' = e^x - 1}$, tem-se:

$$\boldsymbol{\int e^x\,dx - 1 = e^x - x + c}$$

Logo, a opção correcta é D.

【**Outra resolução**】

$$\int (e^x - 1)\,dx = e^x - x + c$$

Opção: D

⟵ $(e^x)' = e^x$; $(c)' = 0, \forall c \in \mathbb{R}$

Definição da função primitiva:
Sejam $F(x)$ e $f(x)$ duas funções contínuas. A função $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ para qualquer x do domínio de $f(x)$ se a derivada de $F(x)$ é igual a $f(x)$. Isto é: $F'(x) = f(x)$.

Definição do integral indefinida:
Se $f(x)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, chama-se integral indefinida, à expressáo $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ e c é uma constante.

Se $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$, então $\boldsymbol{\int f(x)\,dx = F(x) + c}$.

⟵ Como $(e^x + c)' = e^x$, $\boldsymbol{\int e^x\,dx = e^x + c}$.

Como $(kx + c)' = k$, $\boldsymbol{\int k\,dx = kx + c}$.

40.

Qual é a expressão equivalente a i^{13}?

A. -1 B. $-i$ C. i D. i^3

2012. 2ª época

【**Resolução**】

$i^{13} = i^{12+1} = i^{12} \cdot i = (\boldsymbol{i^2})^6 \cdot i = (\boldsymbol{-1})^6 \cdot i = i$

Opção: C

【**Outra resolução**】

$i^{13} = \left(\sqrt{-1}\right)^{13} = \sqrt{(-1)^{13}} = \boldsymbol{\sqrt{-1} = i}$

⟵ **Definição de número imaginário**:
★ $\sqrt{-1} = i$ ★ $i^2 = -1$

⟵ $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$

FIM

República de Moçambique

Matemática **Ministério da Educação** **Exame Extraordinário**

12ª Classe / 2011 **Conselho Nacional de Exames, Certificação e Equivalências** **120 Minutos**

Esta prova contém 40 perguntas com 4 alternativas de resposta para cada uma. Escolha a alternativa correcta e *RISQUE* a letra correspondente na sua folha de respostas. Responda a todas as primeiras 35 perguntas. As últimas 5 perguntas responda somente às da sua secção (Letras ou Ciências).

【Resolução】

1.

Qual é a escrita simbólica de "o quadrado de um número real não é negativo"?

A. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$ B. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ C. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ D. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$

2011. Extraordinário

【Resolução】

O quadrado de um número real não é negativo.

Isto é: $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$

⟵ Um número real que não é negativo é maior ou igual a zero.

Opção: C

2.

Sabendo que $p \Leftrightarrow q$ é uma proposição falsa, qual das proposições é falsa?

A. $p \wedge q$ B. $p \vee q$ C. $\sim p \Rightarrow q$ D. $p \Rightarrow \sim q$

2011. Extraordinário

【Resolução】

Como $p \Leftrightarrow q$ é F, então pode ser um dos dois casos seguintes:

- p é V e q é F.$\cdots$ ① • p é F e q é V.$\cdots$ ②

⟵ $p \Leftrightarrow q$ so é V se ambas proposições têm o mesmo valor lógio.

A. Se pelo menos de uma das propsições é falsa, então $p \wedge q$ é F.

⟵ $p \wedge q$ só é V se p é V e q é V.

B. Se pelo menos de uma das proposição é verdadeira, então $p \vee q$ é V.

⟵ $p \vee q$ só é F se p é F e q é F.

C. Há que analizar dois casos, ① e ②. No caso ①, se não p é F e q é F, então $\sim p \Rightarrow q$ é V.
No caso ②, se não p é V e q é V então $\sim p \Rightarrow q$ é V.

⟵ $p \Rightarrow q$ só é falsa se p é V e q é F.

D. Há que analizar dois casos, ① e ②. No caso ①, se p é V e não q é F, então $p \Rightarrow \sim q$ é F.
No caso ②, se p é V e não q é V então $p \Rightarrow \sim q$ é V.

⟵ $p \Rightarrow q$ só é falsa se p é V e q é F.

Logo, apenas a proposição da opção A é falsa.

Opção: A

3.

Qual é o domínio de existência da expressão $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-4}$?

A. $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ B. $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ C. $[-1; +\infty[$ D. $[-1; +\infty[\setminus\{2\}$

2011. Extraordinário

【Resolução】

Apresenta-se as condições: $x+1 \geq 0 \cdots ① \ \wedge \ x^2-4 \neq 0 \cdots ②$

⟵ A expressão irracional $\sqrt[n]{x}$, onde n é par, tem a condição: $x \geq 0$. O denominador é diferente de zero.

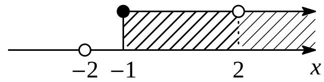
Resolvendo ①, tem-se: $x \geq -1 \cdots ①'$

Resolvendo ②, tem-se: $(x-2)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2 \cdots ②'$

⟵ $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$

Calculando a intersecção de ① com ②, tem-se:

$x \geq -1 \wedge x \neq 2 \Leftrightarrow x \in [-1; +\infty[\backslash\{2\}$ $\longleftarrow$



Opção: D

4.

Qual é a soma dos valores de $x; y$ e z no sistema $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases}$?

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

2011. Extraordinário

【Resolução】

Seja $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \cdots ① \\ x - y + z = 2 \cdots ② \\ 3x - y + 2z = 7 \cdots ③ \end{cases}$

Calculando ① + ②, tem-se: $3x + 2z = 9 \cdots ④$

$$\longleftarrow \begin{array}{rrrrrrl} & 2x & + y & + & z & = & 7 \\ +) & x & - y & + & z & = & 2 \\ \hline & 3x & & + & 2z & = & 9 \end{array}$$

Calculando ① + ③, tem-se: $5x + 3z = 14 \cdots ⑤$

$$\longleftarrow \begin{array}{rrrrrrl} & 2x & + y & + & z & = & 7 \\ +) & 3x & - y & + & 2z & = & 7 \\ \hline & 5x & & + & 3z & = & 14 \end{array}$$

Então agora tem-se o sistema seguinte com duas incógninats:

$\begin{cases} 3x + 2z = 9 \cdots ④ \\ 5x + 3z = 14 \cdots ⑤ \end{cases}$

Calculando ④ × 3 + ⑤ × (−2), tem-se: $-x = -1 \Leftrightarrow x = 1$

$$\longleftarrow \begin{array}{rrrrl} & 9x & + 6z & = & 27 \\ +) & -10x & - 6z & = & -28 \\ \hline & - x & & = & -1 \end{array}$$

Substituindo $x = 1$ em ④, tem-se:

$3 + 2z = 9 \Leftrightarrow 2z = 6 \Leftrightarrow z = 3$

Substituindo $x = 1$ e $z = 3$ em ①, tem-se:

$2 + y + 3 = 7 \Leftrightarrow y = 2$

Como $(x; y; z) = (1; 2; 3)$, então: $x + y + z = 1 + 2 + 3 = 6$

Opção: C

5.

Quais são as raízes da equação $x^3 - 4x^2 - 5x = 0$?

A. $0; 1; 5$ B. $-1; 0; 5$ C. $-1; 1; 5$ D. $-5; 0; 1$

2011. Extraordinário

【Resolução】

$x^3 - 4x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4x - 5) = 0$ $\longleftarrow$ Coloca-se o factor comum x em evidência.

$\Leftrightarrow x(x - 5)(x + 1) = 0$ $\longleftarrow$ $x^2 - 4x - 5 = x^2 + (-5 + 1)x + (-5) \cdot 1 = (x - 5)(x + 1)$, aplicando $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$.

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5 \vee x = -1$

Opção: B

6.

Qual é a expressão equivalente a $\dfrac{27 - 3x^2}{-x^2 - 6x - 9}$?

A. $\dfrac{3x + 9}{x - 3}$ B. $\dfrac{9 - x}{x + 3}$ C. $\dfrac{3x - 9}{x + 3}$ D. $\dfrac{3x^2 - 9}{x + 3}$

2011. Extraordinário

【Resolução】

$$\frac{27 - 3x^2}{-x^2 - 6x - 9} = \frac{3x^2 - 27}{x^2 + 6x + 9} = \frac{3(x^2 - 9)}{(x + 3)^2}$$

$\longleftarrow$ Multiplica-se por −1 o numerador e o denominador.

★$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$; $3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9)$

$$= \frac{3(x - 3)\cancel{(x + 3)}}{(x + 3)^{\cancel{2}}} = \frac{3(x - 3)}{x + 3} = \frac{3x - 9}{x + 3}$$

$\longleftarrow$ $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ porque $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Opção: C

7.

Quando o ângulo de elevação do sol em relação ao solo é de 30°, a sombra de um edifício mede 18m. Qual é a altura do edifício?

A. $3\sqrt{3}$m B. $4\sqrt{3}$m C. $6\sqrt{3}$m D. $18\sqrt{3}$m

2011. Extraordinário

【**Resolução**】

Seja x a altura do edifício em mêtros.

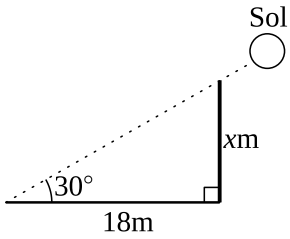
Pela figura, tem-se:

$$\text{tg}30^\circ = \frac{x}{18} \Leftrightarrow x = 18 \cdot \text{tg}30^\circ$$

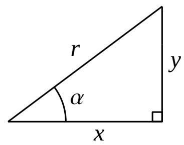
$$\Leftrightarrow x = \frac{18}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{18\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 6\sqrt{3}$$



Opção: C



⟵ ★ $\text{sen}\alpha = \frac{y}{r}$ ★ $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ ★ $\text{tg}\alpha = \frac{y}{x}$

⟵ $\text{tg}30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

⟵ Racionaliza-se a fracção, multiplicando por $\sqrt{3}$ ambos os termos da fracção.

8.

Sabendo que $\text{tg}\alpha = -\sqrt{3}$ e $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, qual é o valor de $\text{sen}\alpha$?

A. $-2\sqrt{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $2\sqrt{3}$

2011. Extraordinário

【**Resolução**】

A partir da fórmula $\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, tem-se:

$$\text{sen}\alpha = \text{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = -\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Opção: B

⟵ **Fórmula**: $\text{tg}x = \frac{\text{sen}x}{\cos x} \Leftrightarrow \text{sen}x = \text{tg}x \cdot \cos x$

⟵ Substitui-se $\text{tg}\alpha$ por $-\sqrt{3}$ e $\cos\alpha$ poe $\frac{1}{2}$.

9.

Sendo $x > \frac{1}{2}$, a que é igual $|-2x+1|$?

A. $-2x+1$ B. $-2x-1$ C. $2x-1$ D. $2x+1$

2011. Extraordinário

【**Resolução**】

$$|-2x+1| = \begin{cases} -2x+1 & \text{se } -2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -1 \\ -(-2x+1) & \text{se } -2x+1 < 0 \Leftrightarrow -2x < -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2x+1 & \text{se } x \leq \frac{1}{2} \\ \mathbf{2x-1} & \textbf{se } \boldsymbol{x > \frac{1}{2}} \end{cases}$$

Por isso, sendo $x > \frac{1}{2}$, tem-se: $|-2x+1| = 2x-1$

Opção: C

⟵ **Definição de módulo**:

$$\star |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

10.

Qual é o conjunto solução da equação $|3x+2| = 1$?

A. $\left\{-1; -\frac{1}{3}\right\}$ B. $\left\{-1; \frac{1}{3}\right\}$ C. $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ D. $\{-1\}$

2011. Extraordinário

【**Resolução**】

$$|3x+2| = 1 \Leftrightarrow 3x+2 = 1 \ \lor\ 3x+2 = -1$$

$$\Leftrightarrow 3x = -1 \ \lor\ 3x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \lor x = -1$$

Opção: A

⟵ **Equação modular do tipo $|x| = a$, onde $a \geq 0$**:

$\star |x| = a \Leftrightarrow x = a \ \lor\ x = -a$

11.

Qual é a expressão equivalente a $\dfrac{(n+1)!-n!}{(n-1)!}$?

A. n^2-2n B. n^2 C. n^2+2n D. n^2+2n+1

2011. Extraordinário

【**Resolução**】

$$\frac{(n+1)!-n!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)n\boldsymbol{(n-1)!}-n\boldsymbol{(n-1)!}}{(n-1)!}$$

⟵ $(n+1)! = (n+1)n\underbrace{(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}_{(n-1)!} = (n+1)n(n-1)!$

$$= \frac{\boldsymbol{(n-1)!}[(n+1)n-n]}{(n-1)!}$$

⟵ Coloca-se o factor comum $(n-1)!$ em evidência.

$$= (n+1)n-n = n^2+n-n = n^2$$

⟵ Simplifica-se $(n-1)!$.

Opção: B

12.

Um examinando precisa de responder 8 das 10 perguntas do exame de Matemática para poder transitar de classe. De quantas maneiras diferentes o examinando pode fazer a sua escolha?

A. 90 B. 80 C. 45 D. 8

2011. Extraordinário

【**Resolução**】

Deseja-se o número total das maneiras diferentes de escolher 8 elementos dentre 10 elementos.

⟵ C_n^p é o número total das maneiras diferentes possíveis de escolher p elementos dentre n elementos. Quando não interessa ordem, trata-se de uma combinação C_n^p.

Como não interessa ordem, trata-se de uma combinação de 10 elementos tomados 8 a 8, isto é:

$$C_{10}^8 = C_{10}^2 = \frac{A_{10}^2}{2!} = \frac{10\cdot 9}{2} = 45$$

⟵ $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!} = \dfrac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}^{p \text{ factores}}}{p(p-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$

Propriedade: $C_n^p = C_n^{n-p}$

Opção: C

13.

Numa certa família, 10 pessoas jogam futebol, 8 andebol e 3 praticam as duas modalidades. Qual será a probabilidade de, ao escolher ao acaso um membro desta família, seja somente praticante de andebol?

A. $\dfrac{1}{5}$ B. $\dfrac{1}{3}$ C. $\dfrac{2}{5}$ D. $\dfrac{1}{2}$

2011. Extraordinário

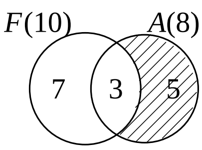
【**Resolução**】

Sejam:

F- Conjunto das pessoas que jogam futebol;

A- Conjunto das pessoas que jogam andebol.

Construi-se o diagrama de Venn como a figura mostra.



O número das pessoas somente praticantes de andebol é: $8-3=5$

⟵ 8 pessoas jogam andebol e 3 pessoas praticam futebol e andebol.

O número das pessoas somente praticantes de futebol é: $10-3=7$

⟵ 10 pessoas jogam futebol e 3 pessoas praticam futebol e andebol.

Então o número da família é: $7+3+5=15$

Logo, o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis são respectivamente 5 e 15.

⟵ $C_5^1 = 5$ e $C_{15}^1 = 15$

Portanto a probabilidade procurada é : $\dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$

⟵ A probabilidade de um acontecimento A é dada por:

P(A)= $\dfrac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$

Opção: B

14.

Duas moedas são lançadas ao mesmo tempo. Qual é a probabilidade de cairem com a mesma face?

A. 0, 25 B. 0, 50 C. 0, 75 D. 1, 0

2011. Extraordinário

【Resolução】

A probabildade de cairem com duas caras é: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

A probabildade de cairem com duas coroas é também:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

A probabildade pedida é igual à probabilidade de cairem com duas caras ou duas coroas.

Portanto a probabildade pedida é: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,50$

Opção: B

⟵ Ao lançar uma moeda, a probabilidade de cair com uma cara e tabmém com uma coroa é $\frac{1}{2}$.

【**Outra resolução**】

Designa-se por C_1: cara e C_2: coroa.

Os acontecimentos possíveis são $2 \cdot 2 = 4$ que são os seguintes: C_1C_1; C_1C_2; C_2C_1; C_2C_2

O número de casos favoráveis é 2 que são os seguintes: C_1C_1; C_2C_2

Logo, a probabilidade é: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

15.

Os extremos de uma progressão aritmética de 5 termos são 1 e 13. Qual é a soma destes 5 termos?

A. 7 B. 14 C. 35 D. 70

2011. Extraordinário

【Resolução】

Como os extremos de uma progressão aritmética de 5 termos são 1 e 13, então tem-se: $a_1 = 1$ e $a_5 = 13$

Logo, a soma destes 5 termos é: $S_5 = \dfrac{5(1+13)}{2} = 35$

Opção: C

⟵ A soma dos n primeiros termos de uma PA é dada por: $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$ ou $S_n = \dfrac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$.

16.

A soma de três primeiros termos de uma progressão aritmética é 27 e o produto dos dois primeiros termos é 36. Qual é o primeiro termo da progressão?

A. 4 B. 5 C. 9 D. 27

2011. Extraordinário

【Resolução】

Como a sucessão é uma PA, então tem-se:

$$a_2 = a_1 + d \text{ e } a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

⟵ $\underbrace{a_1, \quad a_2,}_{+d} \underbrace{\quad a_3}_{+d}$; $\quad a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$

Pela condição, tem-se:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 27 \\ a_1 \cdot a_2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 27 \\ a_1(a_1 + d) = 36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a_1 + 3d = 27 \\ a_1(a_1 + d) = 36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a_1 + d} = 9 \cdots ① \\ a_1(\boldsymbol{a_1 + d}) = 36 \cdots ② \end{cases}$$

⟵ Substitui-se a_2 por $a_1 + d$ e a_3 por $a_1 + 2d$.

⟵ Substitui-se a_2 por $a_1 + d$.

Substituindo ① em ②, tem-se: $a_1 \cdot 9 = 36 \Leftrightarrow a_1 = 4$

Opção: A

17.

Quantos múltiplos de 2 se escrevem com dois algarismos?

A. 98 B. 88 C. 45 D. 44

2011. Extraordinário

【Resolução】

Os múltiplos de 2 de dois algarismos são:

$10, 12, 14, \cdots, 96, 98 \Leftrightarrow 2 \cdot \mathbf{5},\ 2 \cdot \mathbf{6},\ 2 \cdot \mathbf{7}, \cdots, 2 \cdot \mathbf{48},\ 2 \cdot \mathbf{49}$

Então os números são: $\mathbf{49} - \mathbf{5} + 1 = 45$

Opção: C

⟵ Os números da sucessão dos números naturais consectivos cujo primeiro termo é $\boldsymbol{n}$ e o último termo é $\boldsymbol{m}$ são encontrados por $\boldsymbol{m - n + 1}$.

18.

Qual das sucessões é infinitamente pequena?

A. $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \ldots$ B. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4} \ldots$ C. $2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \ldots$ D. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots$

2011. Extraordinário

【**Resolução**】

Calcula-se o limite de cada sucessão das opções dadas:

A. O termo geral é $\frac{n-1}{n}$. Logo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \frac{1}{1} = 1$

B. O termo geral é $\frac{n}{n+1}$. Logo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1} = 1$

C. O termo geral é $\frac{n+1}{n}$. Logo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{1} = 1$

D. O termo geral é $\frac{1}{n}$. Logo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \mathbf{0}$

Como o limite da sucessão da opção D é zero, conclui-se que a sucessão da opção D é infinitamente pequena.

Opção: D

⟵ Se o numerador e o denominador de uma expressão algébrica racional fraccionária têm o mesmo grau, então o limite da expressão quando $x \to \infty$ é igual ao quociente dos coeficientes dos termos de maior grau, isto é: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\boldsymbol{a_1} x^n + b_1 x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \cdots}{\boldsymbol{a_2} x^n + b_2 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \cdots} = \frac{\boldsymbol{a_1}}{\boldsymbol{a_2}}$

⟵ A sucessão a_n é infinitamente pequena se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
A sucessão a_n é infinitamente grande se: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

19.

Qual é o valor de x na equação $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \cdots = 20$?

A. 10 B. 11 C. 20 D. 80

2011. Extraordinário

【**Resolução**】

$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \cdots = 20 \Leftrightarrow x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = 20$

Calcula-se $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$.

Isto é a soma de todos os termos da PG em que $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$.

Como $|q| < 1$, utilizando a fórmula tem-se:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Portanto, tem-se:

$$x(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots) = 20 \Leftrightarrow x \cdot 2 = 20 \Leftrightarrow x = 10$$

Opção: A

⟵ Coloca-se o factor comum x em evidência.

⟵ $1 \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \xrightarrow{\times\frac{1}{2}} \ldots$

⟵ A soma de todos os termos de uma PG de $|q| < 1$ é dada por $\boldsymbol{S = \frac{a_1}{1-q}}$ porque:

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1(1-0)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$$

20.

Qual é o contradomínio da função $f(x) = \cos x - 3$?

A. $[-4; -2]$ B. $[-3; 3]$ C. $[-1; 1]$ D. $[2; 4]$

2011. Extraordinário

【**Resolução**】

Sabe-se que: $-1 \le \cos x \le 1$

Subtraindo 3 em todos os membros da inequação, tem-se;

$$-1 - 3 \le \cos x - 3 \le 1 - 3 \Leftrightarrow -4 \le f(x) \le -2$$

Portanto, o contradomínio de $f(x)$ é $[-4; -2]$.

Opção: A

⟵ **Contradomínio de funções trigonométricas**:
★ $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$;
★ $-1 \le \cos x \le 1$;
★ $-\infty < \operatorname{tg} x < +\infty$

21.

Qual é o período da função $f(x) = \cos 3x$?

A. $\frac{3\pi}{2}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

2011. Extraordinário

【Resolução】

Como o coeficiente de x de $\cos \mathbf{3}x$ é **3**, então o período é:

$$\frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$$

Opção: C

⟵ ★ Os períodos de $y = \text{sen}kx$ e $y = \cos kx$ são $\frac{2\pi}{|k|}$

★ O período de $y = \text{tg}kx$ é $\frac{\pi}{|k|}$.

22.

Em que quadrante, simultaneamente, sen$x > 0$ e $\cos x < 0$?

A. IQ B. IIQ C. $IIIQ$ D. IVQ

2011. Extraordinário

【Resolução】

Em 1° e 2° quadrantes, sen$x > 0$ e em 2° e 3° quadrantes, $\cos x > 0$.

Logo, em 2° quadrante, simultaneamente, sen$x > 0$ e $\cos x < 0$.

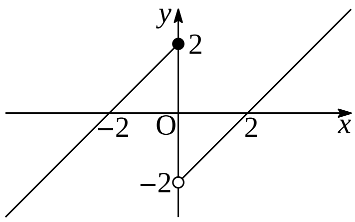
Opção: B

⟵ **<Sinal das razões trigonométricas>**

α	1° Q	2° Q	3° Q	4° Q
senα	+	+	-	-
$\cos\alpha$	+	−	-	+
tgα	+	-	+	-
cotgα	+	-	+	-

23.

Qual é a expressão que define a função representada na figura?



A. $f(x) = \begin{cases} 2 \text{ se } x \le 0 \\ -2 \text{ se } x > 0 \end{cases}$

B. $f(x) = \begin{cases} x+2 \text{ se } x \ge 0 \\ x-2 \text{ se } x < 0 \end{cases}$

C. $f(x) = \begin{cases} x+2 \text{ se } x \le 0 \\ x-2 \text{ se } x > 0 \end{cases}$

D. $f(x) = \begin{cases} 2 \text{ se } x > 0 \\ -2 \text{ se } x \le 0 \end{cases}$

2011. Extraordinário

【Resolução】

Como o gráfico para $\boldsymbol{x \le 0}$ passa pelos pontos $(-2; 0)$ e $(0; 2)$, então a expressão da recta que passa por estes dois pontos é:

$$y - 0 = \frac{2-0}{0-(-2)}[x-(-2)] \Leftrightarrow \boldsymbol{y = x + 2}$$

Como o gráfico para $\boldsymbol{x > 0}$ passa pelos pontos $(0; -2)$ e $(2; 0)$, então a expressão da recta que passa por estes dois pontos é:

$$y - (-2) = \frac{0-(-2)}{2-0}(x-0) \Leftrightarrow \boldsymbol{y = x - 2}$$

Logo, a solução é a opção C.

Opção: C

⟵ A expressão da recta que passa pelos dois pontos $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ é dada por:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

24.

Qual é a classificação da função $f(x) = \frac{1}{x}$ quanto à paridade?

A. Par B. Ímpar C. Não par nem ímpar D. Par e ímpar

2011. Extraordinário

【Resolução】

Calcula-se: $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$

Como $f(-x) = -f(x)$, a função $f(x)$ é ímpar.

Opção: B

⟵ Substitui-se x por $-x$ em $f(x) = \frac{1}{x}$.

⟵ Se $f(-x) = f(x)$, então $f(x)$ é par.
Se $f(-x) = -f(x)$, então $f(x)$ é ímpar.

25.

Qual é o valor de $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$?

A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{3}$

2011. Extraordinário

【Resolução】

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}$$

⟵ Multiplica-se pelo conjugado $\sqrt{x+8}+3$ de $\sqrt{x+8}-3$ o numerador e o denominador.

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+8)-9}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}$$

⟵ $(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)=(\sqrt{x+8})^2-3^2=(x+8)-9$, aplicando $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

$$=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+8}+3)}$$

⟵ Simplifica-se a fracção.

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+8}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

⟵ Substitui-se x por 1.

Opção: C

26.

Qual é o valor de $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^3+1}$?

A. $-\frac{3}{2}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{2}$

2011. Extraordinário

【Resolução】

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^3+1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}$$

⟵ $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$; $a^3\pm b^3=(a+b)(a^2\mp ab+b^2)$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{x^2-x+1}$$

⟵ Simplifica-se a fracção.

$$=\frac{-1-1}{(-1)^2-(-1)+1}=-\frac{2}{3}$$

⟵ Substitui-se x por -1.

Opção: B

27.

Qual é o valor de $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\text{sen}x-\cos x}{1-\text{tg}x}$?

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2011. Extraordinário

【Resolução】

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\text{sen}x-\cos x}{1-\mathbf{tg}\boldsymbol{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\text{sen}x-\cos x}{1-\frac{\mathbf{sen}\boldsymbol{x}}{\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}}}$$

⟵ **Fórmula**: $\text{tg}x=\frac{\text{sen}x}{\cos x}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\text{sen}x-\cos x}{\frac{\cos x-\text{sen}x}{\cos x}}$$

⟵ Denominador: $1-\frac{\text{sen}x}{\cos x}=\frac{\cos x-\text{sen}x}{\cos x}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x(\text{sen}x-\cos x)}{\cos x-\text{sen}x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x\cancel{(\text{sen}x-\cos x)}}{-\cancel{(\text{sen}x-\cos x)}}$$

⟵ $\cos x-\text{sen}x=-(\text{sen}x-\cos x)$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(-\cos x)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

⟵ $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Opção: B

28.

Considere a função $f(x)=\frac{x-2}{x^2-5x+6}$. Qual é a abcissa do ponto de descontinuidade não eliminável?

A. -3 B. -2 C. 2 D. 3

2011. Extraordinário

【**Resolução**】

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \frac{x-2}{(x-2)(x-3)}$$

⟵ Factoriza-se x^2-5x+6 aplicando $x^2+(a+b)x+ab = (x+a)(x+b)$.

Como o denominador é diferente de zero, tem-se a condição:

$$x^2-5x+6 \neq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3 \wedge x \neq 2$$

Por isso, a função não está definida nos pontos $x = 2$ e $x = 3$, isto é, $\nexists f(2)$ e $\nexists f(3)$.

Logo, a função é descontínua nos pontos $x = 2$ e $x = 3$.

⟵ Se não existe o valor de $f(a)$, a função $f(x)$ é descontínua no ponto $x = a$.

Se $x \neq 2$ e $x \neq 3$, então $f(x) = \dfrac{x-2}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{1}{x-3}$.

Verifica-se se existem $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

Como $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-3} = -1$, **existe** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 2} f(x)}$.

⟵ A função f tem uma **descontinuidade eliminável** em $x = a$ se $\boldsymbol{\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)}$ mas $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)}$

Então, a função $f(x)$ tem um ponto de descontinuidade **eliminável** em $x = 2$.

Os limites laterais no ponto $x = 3$ são:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$$

⟵ $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$$

⟵ $\dfrac{1}{0^-} = -\infty$

Como os limites laterais são diferentes, **não existe** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 3} f(x)}$.

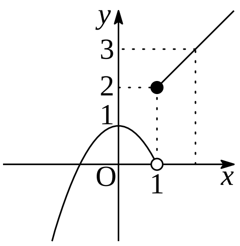
⟵ ★ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha$
★ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \Leftrightarrow \nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$

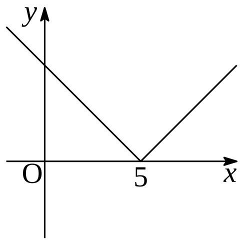
Por isso, a função $f(x)$ tem um ponto de descontinuidade **não eliminável** em $x = 3$.

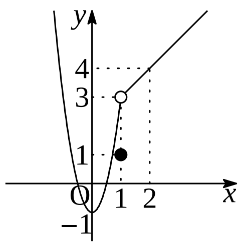
⟵ A função f tem uma **descontinuidade eliminável** em $x = a$ se $\boldsymbol{\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)}$.

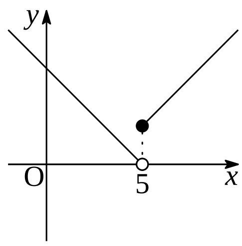
Opção: D

29.
Qual das figuras representa uma função com um ponto de descontinuidade eliminável?

A.


B.


C.


D.


2011. Extraordinário

【**Resolução**】

A. Observando a figura, tem-se $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$. Como os limites laterais são diferentes, $\boldsymbol{\nexists \lim\limits_{x\to 1} f(x)}$. Logo, $x = 1$ é um ponto de descontinuidade **não eliminável**.

⟵ $f(x)$ é contínua no ponto de abcissa $x = a$
$\Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
$\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

⟵ $x = a$ é uma abcissa do ponto de descontinuidade **não eliminável** se $\boldsymbol{\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)}$.

B. Observando a figura, a função é contínua.

C. Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3$, então $\boldsymbol{\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)}$ e o seu limite é 3. Mas como $f(1) = 1$, então $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)}$. Logo, $x = 1$ é um ponto de descontinuidade **eliminável**.

⟵ $x = a$ é uma abcissa do ponto de descontinuidade **eliminável** se $\boldsymbol{\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)}$ mas $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)}$.

D. Como os limites laterais em $x = 5$ são diferentes, então $\boldsymbol{\nexists \lim\limits_{x\to 5} f(x)}$. Por isso $x = 5$ é um ponto de descontinuidade **não eliminável**.

Opção: C

30.

Qual é a 1ª derivada da função $f(x) = e^{\sqrt{2x}}$?

A. $\sqrt{2x} \cdot e^{\sqrt{2x}}$ B. $\sqrt{2} \cdot e^{\sqrt{2x}}$ C. $\dfrac{2e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2} \cdot x}$ D. $\dfrac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}}$

2011. Extraordinário

【**Resolução**】

$$f'(x) = \left[e^{\sqrt{2x}}\right]' = e^{\sqrt{2x}} \cdot \left(\sqrt{2x}\right)'$$

$$= e^{\sqrt{2x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot (2x)' = \frac{e^{\sqrt{2x}} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x}} = \frac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}}$$

Opção: D

$\longleftarrow \left[e^{f(x)}\right]' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$ porque $(e^x)' = e^x$.

$\longleftarrow \left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$ porque $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

31.

Sendo $g(x) = x^2 + 2x$, qual é o valor de $g'(1)$?

A. 0 B. 2 C. 3 D. 4

2011. Extraordinário

【**Resolução**】

Calcula-se: $g'(x) = (x^2 + 2x)' = 2x + 2$ $\longleftarrow (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Por isso, tem-se: $g'(1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4$ $\longleftarrow$ Substitui-se x por 1.

Opção: D

32.

Qual é a 2ª derivada da função $f(x) = \ln x$?

A. $-\dfrac{1}{x}$ B. $-\dfrac{1}{x^2}$ C. $\dfrac{1}{x}$ D. $\dfrac{1}{x^2}$

2011. Extraordinário

【**Resolução**】

Calcula-se: $f'(x) = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $\longleftarrow (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Por isso, a 2ª derivada da função é:

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Opção: B

$\longleftarrow (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
A segunda derivada é a derivada da primeira derivada, isto é, $f''(x) = [f'(x)]'$.

33.

O gráfico da função f, definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, tem um extremo mínimo. Quais são as coordenadas desse ponto?

A. $\left(-\dfrac{1}{2}; 1\right)$ B. $\left(-1; -\dfrac{1}{2}\right)$ C. $\left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$ D. $\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$

2011. Extraordinário

【**Resolução**】

Antes da resolução, calcula-se o domínio da função.

Como o denominador é diferente de zero, tem-se:

$x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -1$

Como $x^2 \geq 0$, $x^2 \neq -1$ é sempre verdade em $x \in \mathbb{R}$. $\longleftarrow \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$

Logo, $D_f = \mathbb{R}$.

Calcula-se $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{(x)'(x^2+1) - (x^2+1)'x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(x^2+1) - 2x \cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$\longleftarrow$ **Derivada do quociente de duas funções:**

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$\longleftarrow (x)' = 1;\quad (x^2+1)' = 2x$

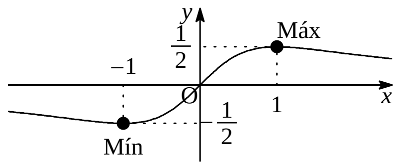
Calcula-se os zeros da função derivada:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2+1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

⟵ Há posibilidade de ter extremos para $x = -1$ e $x = 1$.

Constroi-se a tabela de monotonia e extremos:

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	Mín	↗	Máx	↘



Pela tabela, couclui-se que a função $f(x)$ tem um extremo mínimo para $x = -1$. Como $f(-1) = \dfrac{-1}{(-1)^2+1} = -\dfrac{1}{2}$, as coordenadas do extremo mínimo são $\left(-1; -\dfrac{1}{2}\right)$.

⟵ ★ Se $\boldsymbol{f'(a) = 0}$ e $f'(x)$ passa em $x = a$ de **negativa a positiva**, a função $f(x)$ tem para $x = a$ um **mínimo** extremo.
★ Se $\boldsymbol{f'(a) = 0}$ e $f'(x)$ passa em $x = a$ de **positiva a negativa**, a função $f(x)$ tem para $x = a$ um **máximo** extremo.

Opção: B

34.

Quais são as coordenadas do ponto de tangência da curva definida pela expressão $y = x^2 - 7x + 3$ e a recta de equação $5x + y - 2 = 0$?

A. $(-1; -9)$ B. $(-1; -3)$ C. $(1; -3)$ D. $(1; 9)$

2011. Extraordinário

【**Resolução**】

Sejam $f(x) = x^2 - 7x + 3$ e $A(a; f(a))$ o ponto de tangência.
Então, tem-se: $f'(x) = 2x - 7$ e $f'(a) = 2a - 7$.
Neste caso, sabe-se que $f'(a)$ é igual ao declive da recta tangente $5x + y - 2 = 0$ em $x = a$.

⟵ O declive da recta tangente ao gráfico de uma função $y = f(x)$ no ponto $x = a$ é igual a $f'(a)$.

Como o declive da recta $5x + y - 2 = 0$ é -5, tem-se: $f'(a) = -5$

⟵ Como $5x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \mathbf{-5}x + 2$, o declive da recta $5x + y - 2 = 0$ é $\mathbf{-5}$.

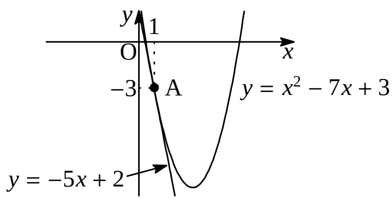
Como $f'(a) = 2a - 7$, tem-se:

$$2a - 7 = -5 \Leftrightarrow 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1$$

Portanto a ordenada do ponto A de tangência é:

$$f(1) = 1^2 - 7 \cdot 1 + 3 = -3$$

Logo, as coordenadas do ponto de tangência são $(1; -3)$.



Opção: C

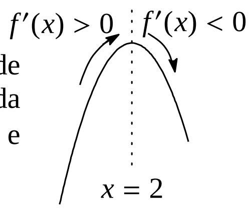
35.

Seja $f(x)$ uma função cujo gráfico tem um ponto máximo de abcissa $x = 2$. Qual das características abaixo poderá representar a sua primeira derivada?

A. $f'(x) < 0; \forall x \in]-\infty; 2]$ B. $f'(x) < 0; \forall x \in]-\infty; 2[$
C. $f'(x) > 0; \forall x \in]-\infty; 2[$ D. $f'(x) > 0; \forall x \in]-\infty; 2]$

2011. Extraordinário

【**Resolução**】



Para que $f(x)$ tenha um ponto máximo de abcissa $x = 2$, é necessário que o gráfico da função seja crescente à esquerda de $x = 2$ e decrescente à direita de $x = 2$.
Isto é:

$$f'(x) > 0; \forall x \in]-\infty; 2[\quad \text{e} \quad f'(x) < 0; \forall x \in]2; +\infty[.$$

Por isso, a solução é a opção C.

⟵ ★ Se $\boldsymbol{f'(a) = 0}$ e $f'(x)$ passa em $x = a$ de **negativa a positiva**, a função $f(x)$ tem para $x = a$ um **mínimo** extremo.
★ Se $\boldsymbol{f'(a) = 0}$ e $f'(x)$ passa em $x = a$ de **positiva a negativa**, a função $f(x)$ tem para $x = a$ um **máximo** extremo.

⟵ ★Se $f'(x) > 0$, então $f(x)$ é crecente.
★Se $f'(x) < 0$, então $f(x)$ é decrecente.
★Se $f'(x) = 0$, então $f(x)$ é constante.

Opção: C

Somente para a Secção de Letras

36.

Dados os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, qual é a afirmação NÃO correcta?

A. $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N} = \mathbb{Z}$ B. $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ C. $\mathbb{N} \supset \mathbb{R}$ D. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

2011. Extraordinário

【Resolução】

Verifica-se se cada opção é correcta ou não:

A. A afirmação $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N} = \mathbb{Z}$ é correcta porque $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

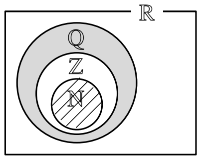
B. A afirmação $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ é correcta porque $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

C. A afirmação $\mathbb{N} \supset \mathbb{R}$ **não é correcta** porque $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

D. A afirmação $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ é correcta.

Opção: C

$\mathbb{N}$ = {Números naturais} = $\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$
$\mathbb{Z}$ = {Números inteiros} = $\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2\cdots\}$
$\mathbb{Q}$ = {Números racionais = $\mathbb{Z} \cup$ {Números fraccionários}
$\mathbb{R}$ = {Números reaisl} = $\mathbb{Q} \cup$ {Números irracionais}



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

37.

Seja $U = \{1; 2; 3; \ldots; 10\}$ o conjunto universo, $M = \{2; 4; 6; 8; 10\}$ e $N = \{2; 5; 8\}$ seus subconjuntos. Qual é o conjunto $\overline{M} \cap \overline{N}$?

A. $\{1; 3; 7; 9\}$ B. $\{1; 3; 5; 7; 9\}$ C. $\{1; 3; 5; 7\}$ D. $\{1; 2; 3; 5; 7\}$

2011. Extraordinário

【Resolução】

Determina-se $\overline{M}$ e $\overline{N}$:

$\overline{M} = U \setminus M = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, 5, \mathbf{7}, \mathbf{9}\}$

$\overline{N} = U \setminus N = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, 4, 6, \mathbf{7}, \mathbf{9}, 10\}$

Por isso, tem-se: $\overline{M} \cap \overline{N} = \{1, 3, 7, 9\}$

Opção: A

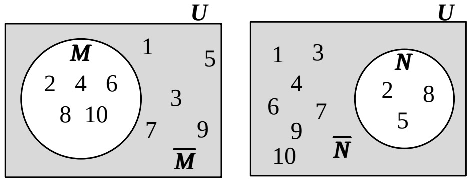
【Outra resolução】

Pelas leis de De Morgan, tem-se: $\overline{M} \cap \overline{N} = \overline{M \cup N}$

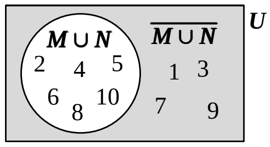
Como $U = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ e $M \cup N = \{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$, tem-se:

$\overline{M \cup N} = U \setminus M \cup N$
$= \{1, 3, 7, 9\}$

$\overline{A}$ é o conjunto de todos os elementos que pertencem a U e não pentencem a A. Isto é $\overline{A} = U \setminus A$.



⟵Leis de De Morgan: $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$; $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}$



38.

De entre os pratos servidos num juntar de 10 pessoas sabe se que 4 pessoas comeram lulas, 6 comeram peixe e 3 comeram lulas e peixe. Quantas pessoas não comeram lulas nem peixe?

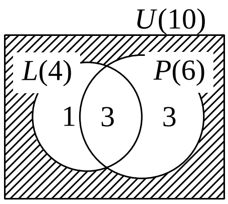
A. 0   B. 1   C. 2   D. 3

2011. Extraordinário

【Resolução】

Sejam U- Conjunto de todas as pessoas que estiveram no juntar; ⟵ $n(U) = 10$
L- Conjunto das pessoas que comeram lulas; ⟵ $n(L) = 4$
P- Conjunto das pessoas que comeram peixe. ⟵ $n(P) = 6$

Constroi-se o diagrama de Venn como se mostra à direita.



As pessoas que comeram apenas lulas são: $4 - 3 = 1$ ⟵ 4 pessoas comeram lulas e 3 comeram lulas e peixe.

As pessoas que comeram apenas peixe são: $6 - 3 = 3$ ⟵ 6 pessoas comeram peixe e 3 comeram lulas e peixe.

Por isso, as pessoas que não comeram lulas nem peixe são:

$$10 - (1 + 3 + 3) = 10 - 7 = 3$$

Opção: D

39.

A que é igual $\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$?

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

2011. Extraordinário

【**Resolução**】

Deseja-se o ângulo cujo tangente é $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Calcula-se a tangente do ângulo de cada opção dada.

A. $\text{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; B. $\text{tg}\frac{\pi}{4} = 1$;

C. $\text{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$; D. Não existe $\text{tg}\frac{\pi}{2}$.

Na opção A, como $\text{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, então $\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Opção: A

⟵ A função inversa da tangente é arctangente.
Se $f(x) = \text{tg}x$, então $f^{-1}(x) = \text{arctg}x$.

Por exemplo,

$\text{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \text{arctg}\,\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

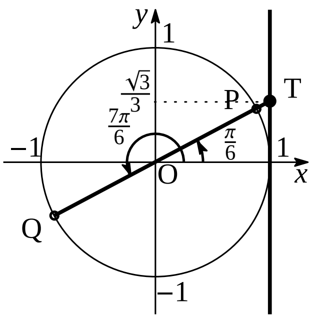
$\text{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \Leftrightarrow \text{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$

【**Outra resolução**】

Resolve-se a equação $\text{tg}x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ com $-90° \le x \le 90°$.

Toma-se o ponto $T\left(1; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Sejam P e Q os dois pontos das intersecções da recta OT com o círculo torigonométrico.
Como os ângulos x pedidos são formados pelo segmento OP com o eixo das abcissas no sentido positivo e pelo segmento OQ com o eixo das abcissas no sentido positivo,



então $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{7\pi}{6}$. Como $0 \le x \le \pi$, então $x = \frac{\pi}{6}$

⟵ As soluções da equação $\text{tg}\theta = \boldsymbol{\alpha}$ são os ângulos formados pelo segmento OP com o eixo das abcissas no sentido positivo e pelo semento OQ com o eixo das abcissas no sentido positivo, onde os pontos P e Q são as intersecções da recta OT com o círculo trigonométrico, onde o ponto T é $(1; \boldsymbol{\alpha})$.

40.

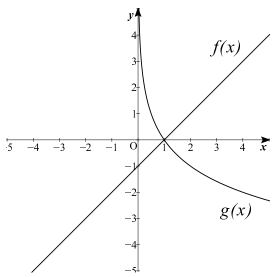
Para que valores de x $g(x) > f(x)$?

A. $]0; 1[$

B. $[0; 1]$

C. $]-\infty; 1[$

D. $]1; +\infty[$



2011. Extraordinário

【**Resolução**】

Deseja-se o intervalo de x em que o gráfico de $y = g(x)$ está em cima do gráfico de $y = f(x)$.
Pela leitula do gráfico, conclui-se que o gráfico de $y = g(x)$ está em cima do gráfico de $y = f(x)$ no intervalo $]0; 1[$.

Opção: A

⟵ $g(x) > f(x)$ significa o intervalo de x em que o gráfico da função $y = g(x)$ está em cima do gráfico da função $y = f(x)$.

Somente para a Secção de Ciências

36.

Qual é a equação reduzida da circunferência de centro C(−1; 3) e raio $r = 5$?

A. $(x-1)^2+(y-3)^2 = 25$ B. $(x+1)^2+(y-3)^2 = 25$ C. $(x-1)^2+(y+3)^2 = 25$ D. $(x+1)^2+(y+3)^2 = 25$

2011. Extraordinário

【Resolução】

A equação reduzida da circunferência de centro C(−1; 3) e raio $r = 5$ é:

$$[x-(-1)]^2 + (y-3)^2 = 5^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$$

Opção: B

⟵ A equação reduzida da circunferência de centro C(a, b) e raio r é dada por:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

37.

Qual é a solução de $\int \left(\text{sen}x + \frac{3}{x}\right)dx$?

A. $\cos x + 3\ln|x| + c$ B. $3\ln|x| - \cos x + c$ C. $\cos x - 3\ln|x| + c$ D. $\ln|x| - \cos x + c$

2011. Extraordinário

【Resolução】

Deriva-se a função de cada opção para se encontrar a função cuja primeira derivada é $\text{sen}x + \frac{3}{x}$:

A. $(\cos x + 3\ln|x| + c)' = -\text{sen}x + 3\cdot\frac{1}{x} = -\text{sen}x + \frac{3}{x}$

⟵ $(\cos x)' = -\text{sen}x$; $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

B. $\boldsymbol{(3\ln|x| - \cos x + c)'} = 3\cdot\frac{1}{x} - (-\text{sen}x) = \boldsymbol{\frac{3}{x} + \text{sen}x}$

C. $(\cos x - 3\ln|x| + c)' = -\text{sen}x - 3\cdot\frac{1}{x} = -\text{sen}x - \frac{3}{x}$

D. $(\ln|x| - \cos x + c)' = \frac{1}{x} - (-\text{sen}x) = \frac{1}{x} + \text{sen}x$

Na opção B, como $\boldsymbol{(3\ln|x| - \cos x + c)' = \text{sen}x + \frac{3}{x}}$, tem-se:

$$\boldsymbol{\int \left(\text{sen}x + \frac{3}{x}\right)dx = 3\ln|x| - \cos x + c}$$

Opção: B

★**Definição da função primitiva**:
Sejam $F(x)$ e $f(x)$ duas funções contínuas.
A função $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ para qualquer x do domínio de $f(x)$ se a derivada de $F(x)$ é igual a $f(x)$, isto é, $F'(x) = f(x)$.

★**Definição de integral indefinida**:
Se $f(x)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, então chama-se integral indefinida, à expressão $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ e c é uma constante.

$\boldsymbol{F'(x) = f(x) \Longleftrightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + c}$, onde $c \in \mathbb{R}$.

【Outra resolução】

$$\int \left(\text{sen}x + \frac{3}{x}\right)dx = -\cos x + 3\ln|x| + c$$
$$= 3\ln|x| - \cos x + c$$

⟵ $\int \text{sen}x dx = -\cos x + c$; $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$

38.

Usando a unidade imaginária i, como pode ser escrito o número $3 + \sqrt{-25}$?

A. $3 - 5i$ B. $-2i$ C. $3 + 5i$ D. $8i$

2011. Extraordinário

【Resolução】

$3 + \sqrt{-25} = 3 + \sqrt{25}\cdot\sqrt{-1} = 3 + \sqrt{25}i = 3 + 5i$

Opção: C

⟵ **Definição de número imaginário**:
★ $\sqrt{-1} = i$; ★$i^2 = -1$

39.
Dada a função $h(x) = 4x + 2$, qual das funções representa $(hoh)(x)$?

A. $4x + 2$ B. $8x + 4$ C. $16x + 4$ D. $16x + 10$

2011. Extraordinário

【**Resolução**】

$(hoh)(x) = h[\boldsymbol{h(x)}]$ ⟵ **Função composta**: $(hoh)(x) = h[h(x)]$

$= h(\mathbf{4x + 2})$ ⟵ $h(x) = 4x + 2$

$= h(4x + 2) + 2$ ⟵ Substitui-se x por $4x + 2$ em $h(x) = 4x + 2$.

$= 16x + 8 + 2 = 16x + 10$

Opção: D

40.
Considera a função $f(x) = \log_2 |x|$. Qual é o domínio da função?

A. $\mathbb{R}^-$ B. $\mathbb{R}^+$ C. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ D. $\mathbb{R}$

2011. Extraordinário

【**Resolução**】

Como o logaritmando é positivo, tem-se a condição: $|x| > 0$ ⟵ $\log_a x$ tem como condição: $x > 0$

Então resolve-se a inequação $|x| > 0$.

Sabe-se que $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$ e que quando $x = 0$, $|x| = 0$.

Portanto, a solução da inequação $|x| > 0$ é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. ⟵ $|x| > 0 \Leftrightarrow |x| \geq 0 \wedge |x| \neq 0$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Opção: C

FIM

República de Moçambique

Matemática	**Ministério da Educação**	**1ª Época**
12ª Classe / 2011	**Conselho Nacional de Exames, Certificação e Equivalências**	**120 Minutos**

Esta prova contém 40 perguntas com 4 alternativas de resposta para cada uma. Escolha a alternativa correcta e *RISQUE* a letra correspondente na sua folha de respostas. Responda a todas as primeiras 35 perguntas. As últimas 5 perguntas responda somente às da sua secção (Letras ou Ciências).

【Resolução】

1.

Considere as proposições:

p: Samora Machel foi 1° presidente de Moçambique independente.

q: Moçambique é um país africano.

Qual é a escrita simbólica de:

Samora Machel foi o 1° presidente de Moçambique independente e Moçambique não é um país africano?

A. $p \wedge q$ B. $\sim p \wedge q$ C. $p \wedge \sim q$ D. $\sim (p \wedge q)$

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Samora Machel foi o 1° presidente de Moçambique independente e Moçambique não é um país africano.

Isto é a proposição p e a negação da proposição q, ou seja, é $p \wedge \sim q$.

Opção: C

★ negação($\sim$) → não ★ conjunção($\wedge$) → e
★ disjunção($\vee$) → ou

2.

Qual das proposições é equivalente a $p \wedge (p \wedge \sim q)$?

A. $p \wedge \sim q$ B. $\sim p \wedge q$ C. $p \wedge q$ D. $p \vee \sim q$

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

$p \wedge (p \wedge \sim q) = (\boldsymbol{p \wedge p}) \wedge \sim q = \boldsymbol{p} \wedge \sim q$

Opção: A

⟵ **Propriedade associativa**: $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$; $p \wedge p = p$

3.

Qual é o domínio de existência da expressão $\dfrac{2+x}{x^2+3}$?

A. $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ B. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ C. $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$ D. $\mathbb{R}$

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Como o denominador é diferente de zero, tem-se:

$$x^2 + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -3$$

Como $x^2 \geq 0$, então $\forall x \in \mathbb{R}$, é verdade que $x^2 \neq -3$.

Opção: D

⟵ $\dfrac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow$ Condição : $g(x) \neq 0$

⟵ O quadrado de qualquer número real é maior ou igual a zero, isto é: $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$

4.

Qual é o valor de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$?

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot1+1\cdot0\cdot0+1\cdot1\cdot1-(0\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot0)$$

$$= 1+0+1-(0+1+0) = 1$$

Opção: C

$\longleftarrow \begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix} = aei+bfg+cdh-(gec+dbi+ahf)$

5.

Qual é o intervalo que corresponde a solução de $\dfrac{x-3}{x+5} \geq 2$?

A. $]-\infty; -13]$ B. $[-13; -5[$ C. $[-13; +\infty[$ D. $[-13; -5]$

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Como o denominador é diferente de zero, tem-se a condição:

$x+5 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -5$

1° caso: $x+5>0 \Leftrightarrow x>-5 \cdots ①$

Multiplicando ambos os membros da inequação por $x+5$, tem-se: $x-3 \geq 2(x+5) \Leftrightarrow -x \geq 13 \Leftrightarrow x \leq -13 \cdots ②$

$\longleftarrow$ Neste caso, como $x+5>0$, multiplicando por $x+5$ ambos os membros da inequação, o sinal da desigualdade mantem-se.

$\dfrac{x-3}{x+5} \geq 2 \Leftrightarrow x-3 \geq 2(x+5)$

Então, calculando a intersecção de ① e ②, tem-se:

$]-5; +\infty[\cap]-\infty; -13] = \emptyset \cdots ③$

2° caso: $x+5<0 \Leftrightarrow x<-5 \cdots ④$

Multiplicando ambos os membros da inequação por $x+5$, tem-se: $x-3 \leq 2(x+5) \Leftrightarrow -x \leq 13 \Leftrightarrow x \geq -13 \cdots ⑤$

$\longleftarrow$ Neste caso, como $x+5<0$, multiplicando por $x+5$ ambos os membros da inequação, o sinal da desigualdade muda de sentido.

$\dfrac{x-3}{x+5} \geq 2 \Leftrightarrow x-3 \leq 2(x+5)$

Então, a intersecção de ④ e ⑤ é:

$]-\infty; -5[\cap[-13; +\infty[= [-13; -5[\cdots ⑥$

Por fim, calculando a reunião de ③ e ⑥, tem-se a solução:

$\emptyset \cup [-13; -5[= [-13; -5[$

Opção: B

【**Outra resolução**】

Também tem-se a condição: $x \neq -5$

$$\frac{x-3}{x+5} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+5} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-3-2(x+5)}{x+5} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x-13}{x+5} \geq 0$$

Para que se verigfique $\dfrac{-x-13}{x+5} \geq 0$, é necessário que:

$$\begin{aligned}
& -x-13 \geq 0 \wedge x+5>0 && \vee \quad -x-13 \leq 0 \wedge x+5<0\\
\Leftrightarrow\ & -x \geq 13 \wedge x>-5 && \vee \quad -x \leq 13 \wedge x<-5\\
\Leftrightarrow\ & x \leq -13 \wedge x>-5 && \vee \quad x \geq -13 \wedge x<-5\\
\Leftrightarrow\ & x \in \emptyset && \vee \quad -13 \leq x < -5\\
\Leftrightarrow\ & -13 \leq x < -5 &&
\end{aligned}$$

Se $g(x) \neq 0$, então tem-se:

★ $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{f(x)>0 \wedge g(x)>0}$ ou $\boldsymbol{f(x)<0 \wedge g(x)<0}$

porque $\dfrac{+}{+} = +$, $\dfrac{-}{-} = +$.

★ $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{f(x)>0 \wedge g(x)<0}$ ou $\boldsymbol{f(x)<0 \wedge g(x)>0}$

porque $\dfrac{+}{-} = -$, $\dfrac{-}{+} = -$.

6.

Qual é a soma das raízes da equação $x^3 - x^2 - 6x = 0$?

A. -2 B. 0 C. 1 D. 3

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Primeiro, calcula-se as raízes da equação:

$$x^3 - x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-3)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \vee x = -2$$

$\longleftarrow$ Coloca-se em evidência o factor comum x.

$\longleftarrow x^2 - x - 6 = x^2 + (-3+2)x + (-3)\cdot 2 = (x-3)(x+2)$

Segundo, calcula-se a somo das raízes: $0+3+(-2) = 1$

Opção: C

7.

Qual das expressões é equivalente a $x^2(x-1)^2$?

A. $x(x-1)$ B. $x(x-1)^2$ C. $x^2|(x-1)^2|$ D. $|x(x-1)|$

2011.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Como $x^2|(x-1)^2| = x^2(x-1)^2$, a opção correcta é C.

Opção: C

$\longleftarrow \forall x \in \mathbb{R}, |x^2| = x^2$

8.

Qual é a condição para que $|-x+1| = -x+1$?

A. $x < -1$ B. $x \geq 1$ C. $x < 1$ D. $x \leq 1$

2011.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Para que $|-x+1| = -x+1$, é necessário que a expressão que está no dentro do módulo seja maior ou igual a zero.

Então, tem-se: $-x+1 \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq 1$

Opção: D

$\longleftarrow |x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

$\longleftarrow$ Quando se multiplica ambos os membros da inequação por um número negativo, o sinal da desigualdade muda de sentido.

9.

Qual é o valor de n na equação $\dfrac{(n+1)!}{n!} = 68$?

A. $-\dfrac{1}{67}$ B. $\dfrac{1}{67}$ C. 67 D. 69

2011.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$$\frac{(n+1)!}{n!} = 68 \Leftrightarrow \frac{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} = 68 \Leftrightarrow n+1 = 68 \Leftrightarrow n = 67$$

Opção: C

$\longleftarrow (n+1)! = (n+1)\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}_{n!} = (n+1)n!$

10.

Numa festa há cinco tipos de doces e três de salgados. Se cada pessoa receber apenas três tipos de doces e dois de salgados, de quantas maneiras diferentes poder-se-á, fazer esta distribuição?

A. 120 B. 30 C. 26 D. 13

2011.1ªÉpoca

【**Resolução**】

As maneiras diferentes possíveis de escolher 3 doces dentre 5 doces são C_5^2.

As maneiras diferentes possíveis de escolher 2 salgados dentre 3 salgados são C_3^2.

Portanto, o número total das maneiras diferentes possíveis desta distribuição é:

$$C_5^2 \cdot C_3^2 = \frac{5\cdot \cancel{4}^2}{\cancel{2}} \cdot \frac{3\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}} = 10 \cdot 3 = 30$$

Opção: B

$\longleftarrow$ C_n^p é o número total das maneiras diferentes possíveis de escolher p elementos dentre n elementos. Quando não interessa a ordem, trata-se de uma combinação. Quando interessa a ordem, trata-se de um arranjo.

$\longleftarrow C_p^n = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!} = \dfrac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}^{p \text{ factorres}}}{p(p-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$

11.

Uma bola será retirada de uma sacola contendo 5 bolas verdes e 7 amarelas(idênticas). Qual é a probabilidade desta bola ser verde?

A. $\dfrac{1}{5}$ B. $\dfrac{5}{12}$ C. $\dfrac{7}{12}$ D. $\dfrac{5}{7}$

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Como 5 + 7 = 12, esta sacola contém 12 bolas.

Então, o número de casos possíveis é C^1_{12} porque retira-se 1 bola dentre 12 bolas.

⟵ Escolhe-se 1 elemento dentre 12 elementos $\Longrightarrow C^1_{12}$

O número de casos favoráveis é C^1_5 porque retira-se 1 bola verde dentre 5 bolas verdes.

⟵ Escolhe-se 1 elemento dentre 5 elementos $\Longrightarrow C^1_5$

Portanto, a probabilidade pedida é:

$$\frac{C^1_5}{C^1_{12}} = \frac{5}{12}$$

⟵ A probabilidade de um acontecimento A é dada por:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

⟵ $C^1_n = n$

Opção: B

12.

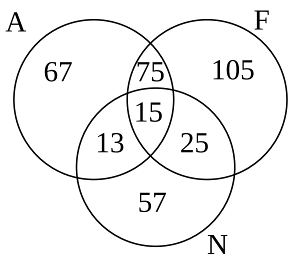
A figura representa atletas de uma associação recreativa, praticantes de atletismo (A), futebol (F) e natação (N). Qual é a probabilidade de, escolhido ao acaso um atleta, ser praticante das três modalidades?

A. $\frac{103}{357}$

B. $\frac{30}{119}$

C. $\frac{28}{357}$

D. $\frac{5}{119}$

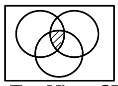


2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Pela leitura da figura, o númro de atletas praticantes das três modalidades é 15.

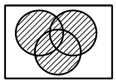
⟵ $n(A \cap F \cap N) = 15$



E o número total de atletas é:

$$67 + 75 + 105 + 13 + 15 + 25 + 57 = 357$$

⟵ $n(A \cup F \cup N) = 67+75+105+13+15+25+57 = 357$



Então, o número de casos possíveis é C^1_{357} porque escolhe-se 1 atleta de 357 atletas.

E o número de casos favoráveis é C^1_{15} porque escolhe-se 1 atleta praticante das três modalidades dentre 15 atletas praticantes das três modalidades .

Por isso, a probabilidade pedida é: $\frac{C^1_{15}}{C^1_{357}} = \frac{15}{357} = \frac{5}{119}$

⟵ A probabilidade de um acontecimento A é dada por:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Opção: D

13.

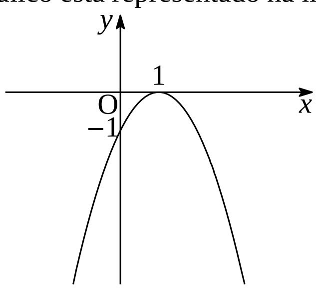
Qual é a expressão analítica da função cujo gráfico está representado na figura?

A. $-x^2 + 2x - 1$

B. $-x^2 - 2x - 1$

C. $-x^2 + 2x + 1$

D. $-x^2 - 2x + 1$



2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Pela leitura da figura, o ponto do vértice é $(1; 0)$.
Então, a expressão analítica da função é representada por:

$$y = a(x-1)^2 + 0 = a(x-1)^2, \text{ onde } a \in \mathbb{R}$$

⟵ Se o ponto do vértice do gráfico de uma função quadrática é $(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{q})$, a expressão analítica é dada por $y = a(x-\boldsymbol{p})^2 + \boldsymbol{q}$.

Calcula-se o valor de a.
Como o gráfico passa pelo ponto $(0, -1)$, substituindo $x = 0$ e $y = -1$ em $y = a(x-1)^2$, tem-se:

$$-1 = a(0-1)^2 \Leftrightarrow a = -1$$

⟵ Se o gráfico de uma função $y = f(x)$ passa pelo ponto $(x_1; y_1)$, então $y_1 = f(x_1)$.

Por fim, substituindo $a = -1$ em $y = a(x-1)^2$, obtém-se a expressão analítica da função:

$$y = -1(x-1)^2 = -(x^2 - 2x + 1) = -x^2 + 2x - 1$$

⟵ $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Opção: A

14.

Qual é o contradomínio da função $f(x) = 2 + \cos x$?

A. $[-3; -1]$ B. $[-2; 2]$ C. $[-1; 1]$ D. $[1; 3]$

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Sabe-se que $-1 \le \cos x \le 1$.
Adicionando 2 a todos os membros da inequação, tem-se:

$$-1 + 2 \le \cos x + 2 \le 1 + 2 \Leftrightarrow 1 \le 2 + \cos x \le 3$$
$$\Leftrightarrow 1 \le f(x) \le 3$$

Portanto, o contradomínio da função $f(x)$ é $[1; 3]$.

⟵ **Contradomínio das funções trigonométricas**
- $-1 \le \operatorname{sen} f(x) \le 1$
- $-1 \le \cos f(x) \le 1$
- $-\infty < \operatorname{tg} f(x) < +\infty$

Opção: D

15.

Considere a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ com $x \in [-\pi; \pi]$. Qual é o domínio da função $h(x) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$?

A. $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ B. $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ C. $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ D. $[-\pi; \pi]$

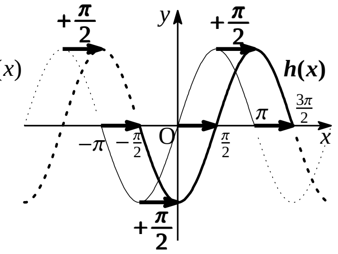
2011.1ªÉpoca

【Resolução】

O gráfico da função $h(x) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ obtém-se a partir do gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ através da translação de $\frac{\pi}{2}$ unidades para direita.
Transladando $\frac{\pi}{2}$ unidades para direita o gráfico de $f(x)$ cujo domínio é $[-\pi; \pi]$, obtém-se o gráfico de $h(x)$ cujo domínio é:

$$\left[-\pi + \frac{\pi}{2}; \pi + \frac{\pi}{2}\right] = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

⟵ O gráfico de uma função $y = f(x-\boldsymbol{p}) + \boldsymbol{q}$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = f(x)$ através de uma translação $\boldsymbol{p}$ unidades para direita e $\boldsymbol{q}$ unidades para esquerda.



Opção: B

16.

Qual é a classificação da função $f(x) = x^3 - x + 2$ quanto à paridade?

A. Par B. Ímpar C. Não par nem ímpar D. Par e ímpar

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Calcula-se $f(-x)$ e $-f(x)$:

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) + 2 = -x^3 + x + 2;$$

← Subustituindo x por $-x$ em $f(x) = x^3 - x^2 + 2$.

$$-f(x) = -(x^3 - x + 2) = -x^3 + x - 2$$

Como $f(-x) \neq f(x)$ e também $f(-x) \neq -f(x)$, a função não é par nem ímpar.

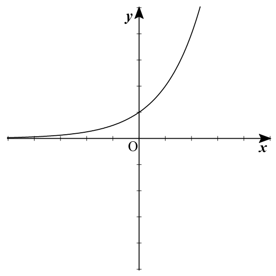
← Se $f(-x) = f(x)$, então $f(x)$ é par.
Se $f(-x) = -f(x)$, então $f(x)$ é ímpar.

Opção: C

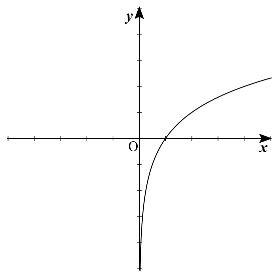
17.

Observe as figuras. Qual é o gráfico da inversa da função $f(x) = \log_2 x$?

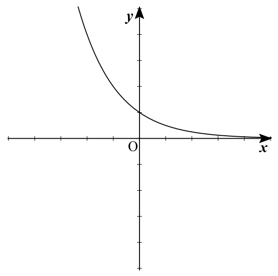
A.



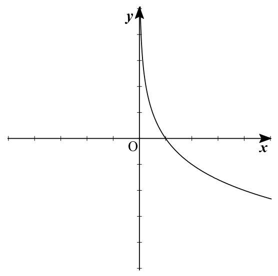
B.



C.



D.

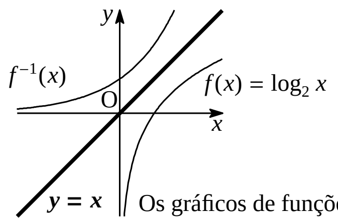


2011.1ªÉpoca

【Resolução】

A opção B representa o gráfio da funcção $f(x) = \log_2 x$.
A inversa da função $f(x) = \log_2 x$ obtém-se pela simetria em relação à recta $y = x$.
Por isso, a opção A representa o gráfico da inversa da função $f(x) = \log_2 x$.

Opção: A



Os gráficos de funções inversas uma da outra são simétricos em relação à recta $y = x$.

18.

Numa sucessão de termo geral $a_n = a_{n-1} + 5$ com $n \in \mathbb{N}$, o termo de ordem três é igual a 17. Qual é o termo de ordem 2?

A. 5 B. 10 C. 12 D. 22

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Substituindo $n = 3$ em $a_n = a_{n-1} + 5$, tem-se: $a_3 = a_2 + 5$

← $a_3 = a_{3-1} + 5$

Como $a_3 = 17$, então tem-se: $a_2 + 5 = 17 \Leftrightarrow a_2 = 12$

Opção: C

19.

Qual é a ordem do termo 3 na sucessão dada por $a_n = 2n - 5$?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Para se obter a ordem do termo 3, resolve-se a equação $a_n = 3$:

← Como a_n representa o termo da ordem n, a solução da equação $a_n = 3$ é a ordem do termo 3.

$$a_n = 3 \Leftrightarrow 2n - 5 = 3 \Leftrightarrow 2n = 8 \Leftrightarrow n = 4$$

Opção: D

20.

Qual é o termo geral da sucessão 2; 6; 18; . . . ?

A. $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ B. $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ C. $a_n = 2 \cdot 3^{n+1}$ D. $a_n = 3 \cdot 2^{n+1}$

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Como o quociente entre dois termos consecutivos é constante 3, então esta sucessão é uma PG em que $a_1 = 2$ e $q = 3$.

Então, o termo geral é: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

Opção: A

⟵ 2, 6, 18, . . .
×3 ×3 ×3

⟵ O termo geral de uma **PG** é dado por $\boldsymbol{a_n = a_1 q^{n-1}}$.
O termo geral de uma **PA** é dado por $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$

21.

Numa progressão aritmética finita, em que a soma dos seus termos é 110, o primeiro e o último termos são respectivamente 2 e 20. Quantos termos tem a sucessão?

A. 21 B. 20 C. 11 D. 10

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Pela condição, tem-se: $S_n = 110$, $a_1 = 2$ e $a_n = 20$

Aplicando a fórmula de soma dos n primeiro termos de uma PA, tem-se: $\dfrac{n(2+20)}{2} = 110 \Leftrightarrow 11n = 110 \Leftrightarrow n = 10$

Opção: D

⟵ A soma dos n primeiros termos de uma PA é dada por:
$S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$ ou $S_n = \dfrac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$

22.

Quais são os três primeiros termos de uma progressão geométrica em que o sétimo termo é 192 e o segundo é 6?

A. 1; 6; 36 B. 3; 6; 9 C. 3; 6; 12 D. 2; 6; 10

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Pela condição tem-se: $a_7 = 192$ e $a_2 = 6$

Como $a_n = a_1 q^{n-1}$, tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_1 q^6 = 192 \Leftrightarrow \boldsymbol{a_1 q} \cdot q^5 = 192 \cdots ① \\ \boldsymbol{a_1 q} = 6 \cdots ② \end{cases}$$

Substituindo ② em ①, tem-se:

$$6q^5 = 192 \Leftrightarrow q^5 = 36 \Leftrightarrow \boldsymbol{q^5 = 2^5 \Leftrightarrow q = 2}$$

Substituindo q por 2 em ①, tem-se: $a_1 \cdot 2 = 6 \Leftrightarrow a_1 = 3$

Portanto, o termo geral desta PA é: $a_n = a_1 q^{n-1} \Leftrightarrow a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

Logo, tem-se: $a_3 = 3 \cdot 2^{3-1} = 3 \cdot 4 = 12$

Portanto, os três primeiros termos são 3; 6; 12.

Opção: C

⟵ O termo geral de uma PG é dado por $a_n = a_1 q^{n-1}$

⟵ Numa igualdade de duas potências com mesmo expoente ímpar iguala-se as bases, isto é, se m é um número ímpar, então $a^m = b^m \Leftrightarrow a = b$.

⟵ Substitui-se $n = 3$ em $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

23.

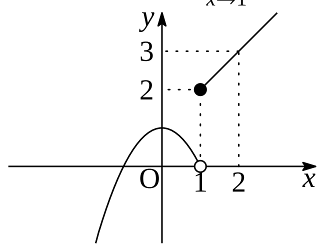
Considere a função f representada na figura. Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$?

A. 0

B. 1

C. 2

D. Não existe.



2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Nota-se que quando x se aproxima de 1 pela esquerda, o gráfico da função f aproxima-se de 0, isto é: $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0$

Opção: A

⟵ Quando x se aproxima de a **pela esquerda**, $f(x)$ aproxima-se de α, simbolicamente, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \alpha$.
Quando x se aproxima de a **pela direita**, $f(x)$ aproxima-se de α, simbolicamente, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \alpha$.

24.

A função $g(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4x + k & \text{se } x \le -1 \\ \dfrac{2x+3}{x} & \text{se } x > -1 \end{cases}$ é contínua no ponto de abcissa $x = -1$. Qual é o valor de k?

A. -8 B. -5 C. 5 D. 8

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Para que seja contínua no ponto de $x = -1$, é necessário que:

$$\lim_{x\to -1^-} g(x) = \lim_{x\to -1^+} g(x) = g(-1)$$

O limite lateral de $g(x)$ à esquerda de $x = -$ é:

$$\lim_{x\to -1^-} g(x) = \lim_{x\to -1^-} (3x^2 - 4x + k) = 3(-1)^2 - 4(-1) + k = \boldsymbol{k+7}$$

⟵ Quando $x \to -1^-$, isto é, $x < -1$, $g(x) = 3x^2 - 4x + k$.

O limite lateral de $g(x9$ à direita de $x = -1$ é:

$$\lim_{x\to -1^+} g(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{2x+3}{x} = \frac{2(-1)+3}{-1} = \boldsymbol{-1}$$

⟵ Quando $x \to -1^+$, isto é, $x > -1$, $g(x) = \dfrac{2x+3}{x}$.

O valor da função $g(x)$ no potno $x = -1$ é;

$$g(-1) = \frac{2(-1)+3}{-1} = \boldsymbol{-1}$$

⟵ Quando $x = -1$, $g(x) = 3x^2 - 4x + k$.

Como estes são iguais, tem-se: $\boldsymbol{k+7=-1} \Leftrightarrow k = -8$

Opção: A

◇ **Definição de continuidade de funções**
Uma função $f(x)$ é contínua para $x = a$ se e só se existe $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Isto é:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)}$$

25.

Qual é o valor de $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$?

A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

⟵ Multiplica-se o numerador e o denominador pelo conjugado $\sqrt{x}+1$ de $\sqrt{x}-1$.

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(\sqrt{x}+1)}$$

⟵ $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) = (\sqrt{x})^2 - 1^2 = x - 1$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

⟵ Substitui-se x por 1.

Opção: D

26.

Qual é o valor de $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{x}$?

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot 2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}} = \frac{1}{2}\cdot\boldsymbol{1} = \frac{1}{2}$$

⟵ **Limite notável**: $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x} = 1$
Em geral, $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}kx}{kx} = 1$.

Opção: A

【Outra resolução】

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{x} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

⟵ $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$; $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\operatorname{sen}\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$

27.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)^x$?

A. -1 B. e^{-1} C. 1 D. e

2011.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)^x = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+1}-1\right)\cdot x}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{x}{x+1}\right)}$$

$$= e^{-\frac{1}{1}} = e^{-1}$$

Opção: B

⟵ Sejam $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$. Então tem-se:
$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\cdot g(x)}$

⟵ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{x}{x+1}\right) = -1$ porque como numerador e o denominador têm o mesmo grau, o limite quando $x\to\infty$ é o quociente dos coeficientes dos termos de maior grau.

28.

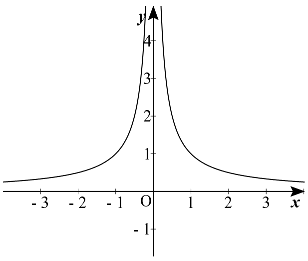
Considere a função f representada na figura.
Qual é o valor de $f'(0)$?

A. 0

B. 1

C. ∞

D. Não existe



2011.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Pela figura, a função não é contínua no ponto de abcissa $x = 0$ porque $\nexists f(0)$. Portanto, $f'(0)$ não existe.

Opção: D

⟵ Toda a função que admite derivada finita num dado ponto é contínua nesse ponto.

29.

Qual é a 1ª derivada da função $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$?

A. $\dfrac{2x^2}{\ln x}$ B. $\dfrac{x(2\ln x-1)}{\ln^2 x}$ C. $\dfrac{2x\ln x - x}{\ln x}$ D. $\dfrac{2x-\frac{1}{x}}{\ln^2 x}$

2011.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$$f'(x) = \left[\frac{x^2}{\ln x}\right]' = \frac{(x^2)'\ln x - x^2(\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{2x\ln x - x^2\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

$$= \frac{2x\ln x - x}{\ln^2 x} = \frac{x(2\ln x-1)}{\ln^2 x}$$

Opção: B

⟵ $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

★ $(x^n)' = nx^{n-1}, \forall n\in\mathbb{R}$ ★ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

30.

Qual é a 1ª derivada da função $f(x) = \sqrt{2x} - 1$?

A. $-\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ B. $\dfrac{2}{\sqrt{2x}}$ C. $\dfrac{\sqrt{2x}}{2x}$ D. $\dfrac{\sqrt{2x}}{x}$

2011.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$$f'(x) = (\sqrt{2x}-1)' = (\sqrt{2x})'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2x}}\cdot(2x)' = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}} = \frac{\sqrt{2x}}{2x}$$

Opção: C

⟵ $(k)' = 0; \forall\in\mathbb{R}$

⟵ **Derivada de uma função composta**:
$\left[\sqrt{f(x)}\right]' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f'(x)$ porque $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

31.

Qual é a 2ª derivada da função $f(x) = \cos x$?

A. $-\text{sen}x$ B. $-\cos x$ C. $\cos x$ D. $\text{sen}x$

2011.1ªÉpoca

【**Resolução**】

A primeira derivada de $f(x)$ é: $f'(x) = (\cos x)' = -\text{sen}x$ ⟵ $(\cos x)' = -\text{sen}x$

Logo, a segunda derivada de $f(x)$ é: $f''(x) = (-\text{sen}x)' = -\cos x$ ⟵ $(\text{sen}x)' = \cos x$

★A segunda derivada é a derivada da primeira derivada.

Opção: B

32.

O gráfico da função f, definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, tem um extremo máximo. Quais são as coordenadas desse ponto?

A. $\left(1; -\dfrac{1}{2}\right)$ B. $\left(-1; -\dfrac{1}{2}\right)$ C. $\left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$ D. $\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$

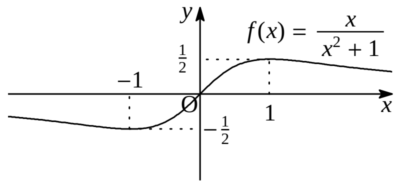
2011.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Começa-se por calcular:

$$f'(x) = \frac{x'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{x^2+1-x(2x)}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

⟵ **Derivada do quociente de duas funções**:
$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$



Calcula-se os zeros da função derivada:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

⟵ Há posibilidade de ter extremos para $x = \pm 1$.

Constroi-se a tabela de monotonia e extremos:

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	Mín	↗	Máx	↘

⟵ ★ Se uma função $f(x)$ tem **derivada nula** para $x = a$ (ou seja $\boldsymbol{f'(a) = 0}$) e $f'(x)$ passa nesse ponto de **negativa a positiva**, a função $f(x)$ tem para $x = a$ um extremo **mínimo**.

★ Se uma função $f(x)$ tem **derivada nula** para $x = a$ (ou seja $\boldsymbol{f'(a) = 0}$) e $f'(x)$ passa nesse ponto de **positiva a negativa**, a função $f(x)$ tem para $x = a$ um extremo **máximo**.

Pela tabela, a função $f(x)$ tem para $x = 1$ um extremo máximo.

Como $f(1) = \dfrac{1}{2}$, o ponto do extremo máximo é $\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$. ⟵ Subsitui-se x por 1 em $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Opção: D

33.

A recta de equação $y = 3x$ é tangente ao gráfico de uma certa função f, no ponto de abcissa $x = 1$. Qual das expressões pode definir a função f?

A. $f(x) = x^2 + x + 1$ B. $f(x) = x^2 + 3x + 1$ C. $f(x) = x^2 + 3x - 1$ D. $f(x) = x^2 + 2x + 1$

2011.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Como o declive da equação $y = 3x$ é 3, pela condição, tem-se $f'(1) = 3$. Então, para que se verifique $f'(1) = 3$, calcula-se o valor de $f'(1)$ da função de cada opção:

⟵ O **declive** da equação da recta tangente ao gráfico de uma função $y = f(x)$ em $\boldsymbol{x = a}$ é igual a $\boldsymbol{f'(a)}$.

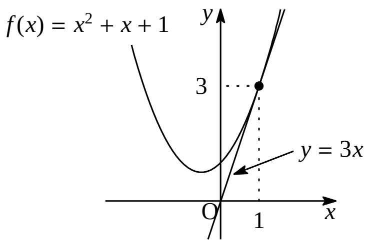
A. Como $f'(x) = 2x + 1$, então $f'(1) = 3$.

B. Como $f'(x) = 2x + 3$, então $f'(1) = 5$.

C. Como $f'(x) = 2x + 3$, então $f'(1) = 5$.

D. Como $f'(x) = 2x + 2$, então $f'(1) = 4$.

Portanto, a opção correcta é A.



Opção: A

34.

Um projéctil é lançado verticalmente de baixo para cima. Admitindo que a sua trajectória é descrita pela equação $h(t) = \frac{4}{3}t^3 - 2t^2 + t$, qual é, em m/s², a aceleração do projéctil 3 segundos após o lançamento?

A. 4m/s^2 B. 20m/s^2 C. 24m/s^2 D. 36m/s^2

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

A velocidade do projéctil t segundos após o lançamento é:

$h'(t) = \left(\frac{4}{3}t^3 - 2t^2 + t\right)' = \frac{3}{4} \cdot 3t^2 - 2 \cdot 2t + 1 = 4t^2 - 4t + 1$

⟵ Se h é a posição de um ponto P que se move verticamente na hora t e apresentada por $\boldsymbol{h = f(t)}$, então a velocidade $\boldsymbol{v}$ e aceleração $\boldsymbol{a}$ do ponto P na hora t são dadas por $\boldsymbol{v = f'(t)}$ e $\boldsymbol{a = f''(t)}$, respectivamente.

Logo, a aceleração do projéctil t segundos após o lançamento é:

$h''(t) = (4t^2 - 4t + 1)' = 8t - 4$

Portanto, a aceleração do projéctil 3 segundos após o lançamento é:

$$h''(3) = 8 \cdot 3 - 4 = 20$$

⟵ Substitui-se t por 3 em $h''(t) = 8t - 4$.

Opção: B

35.

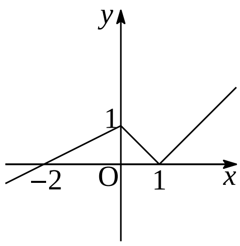
Quais são as abcissas dos pontos em que a função não é derivável?

A. -2 e 0

B. -2 e 1

C. 0 e 1

D. 1 e 2



2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Calcula-se as derivadas laterais de $f(x)$ em $x = 0$ e $x = 1$.

Pela leitura da figura, a derivada lateral à esquerda de 0 é:

$$f'(0^-) = \frac{1-0}{0-(-2)} = \frac{1}{2}$$

⟵ $f'(0^-)$ é igual ao declive da recata da esquerda do ponto $x = 0$.

E a derivada lateral à direita de 0 é:

$$f'(0^+) = \frac{0-1}{1-0} = -1$$

⟵ $f'(0^-)$ é igual ao declive da recata da esquerda do ponto $x = 0$.

Logo, como $f'(0^-) \neq f'(0^+)$, então não é derivável no ponto $x = 0$.

⟵ Uma função é derivável num ponto $x = a$ se e só se é derivável à esquerda e à direita do mesmo ponto e as derivadas laterais são iguais: $\boldsymbol{f'(a^+) = f'(a^-)}$

De modo igual, pela leitura da figura, é claro que:

$$f'(1^-) \neq f'(1^+)$$

Logo, não é derivável também no ponto $x = 0$.

Por isso, a função não é derivável nos pontos $x = 0$ e $x = 1$.

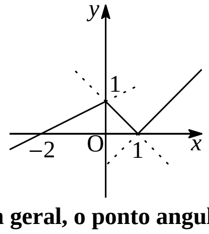
Opção: C

【Outra resolução】

Observando o gráfico, é claro que os declives das rectas da esquerda e da direita do ponto $x = 0$ são diferentes.

Como os declives das rectas da esquerda e da direita do ponto $x = 0$ são iguais a $f'(0^-)$ e $f'(0^+)$ respectivamente, tem-se: $f'(0^-) \neq f'(0^+)$.

Por isso, a função $f(x)$ não é derivavel no ponto $x = 0$.



⟵**Em geral, o ponto anguloso não é derivável.**

Também como os declives das rectas da esquerda e da direita do ponto $x = 1$ são diferentes, então $f'(1^-) \neq f'(1^+)$.

Por isso, a função não é derivável nos pontos $x = 0$ e $x = 1$.

Somente para a Secção de Letras

36.

Quais são as medidas dos catetos de um triângulo cuja hipotenusa mede 6cm e um dos ângulos mede 60°?

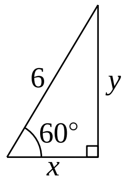
A. $\frac{\sqrt{3}}{12}$cm e $\frac{1}{12}$cm B. $\frac{\sqrt{3}}{12}$cm e $\frac{\sqrt{3}}{2}$cm C. 3cm e $3\sqrt{3}$cm D. 3cm e 6cm

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Sejam x e y as medidas dos catetos como a figura mostra. Então tem-se:

$$\text{sen}60^\circ = \frac{y}{6} \text{ e } \cos 60^\circ = \frac{x}{6}$$



Como $\text{sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tem-se:

$$\text{sen}60^\circ = \frac{y}{6} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{6} \Leftrightarrow 2y = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow y = 3\sqrt{3}$$

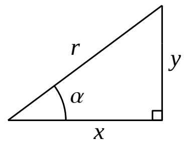
Como $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, tem-se:

$$\cos 60^\circ = \frac{x}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{6} \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$$

Portanto, as medidas dos catetos são 3cm e $3\sqrt{3}$cm.

Opção: C

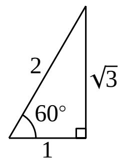
⟵



★ $\text{sen}\alpha = \frac{y}{r}$
★ $\cos\alpha = \frac{x}{r}$
★ $\text{tg}\alpha = \frac{y}{x}$

⟵ $\text{sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

⟵ $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$



37.

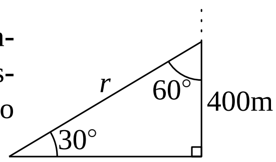
Um pára-quedista salta de um avião a 400m de altitude. Dirige-se para o solo, formando um ângulo de 60° com a vertical. Que distância percorre o pára-quedista?

A. 200m B. $200\sqrt{3}$m C. $300\sqrt{3}$m D. 800m

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Se r é a medida da hipotenusa do triangulo como a figura mostra, então a distância que o pára-quedista percorre é o valor de r.

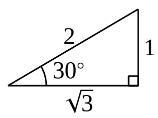


Pela leitura da figura, tem-se:

$$\text{sen}30^\circ = \frac{400}{r} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{400}{r} \Leftrightarrow r = 800$$

Opção: D

⟵



$\text{sen}30^\circ = \frac{1}{2}$

38.

Qual é o complementar, em $\mathbb{R}$, do conjunto $M =]-3; 5[$?

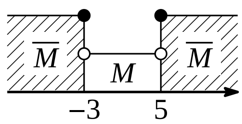
A. $]-\infty; -3] \cup [5; +\infty[$ B. $]-\infty; -3]\cup]5; +\infty[$ C. $]-\infty; -3[\cup[5; +\infty[$ D. $]-\infty; -3[\cup]5; +\infty[$

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

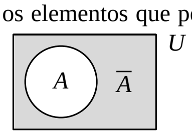
Pela leitura da figura, o complementar do conjunto M é:

$$\overline{M} =]-\infty; -3] \cup [5; +\infty[$$



Opção: A

Considerem-se os conjuntos U (Universal) e A, de tal modo que $A \subset U$. Chama-se **complementar do conjunto A**, ao conjunto de todos os elementos que pertencem a U e não pertencem a A.



39.

Dados os conjuntos $M = \{2; 4; 6\}$ e $N = \{1; 2; 3; 6\}$. Qual é o cardinal de $M \cup N$?

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

$M \cup N = \{1; 2; 3; 4; 6\}$

Como $M \cup N$ contém 5 elementos, o cardinal de $M \cup N$ é 5.

Opção: D

⟵ $M \cup N = \{x \mid x \in M \text{ ou } x \in N\}$

⟵ Chama-se cardinal ao número de elementos de um conjunto.

40.

Num seminário com 50 participantes, 21 falam português, 14 falam inglês, 9 falam português e inglês e os restantes falam outras línguas. Quantos falam outras línguas?

A. 15 B. 21 C. 24 D. 35

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Sejam U- Conjunto de todos os participantes no seminário;

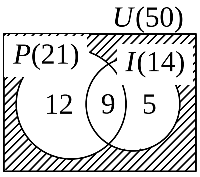
P- Conjunto dos participantes que falam portugûes;

I - Comjunto dos participantes que falam inglês.

Então pode-se construir o diagramma de Venn como a figura mostra.

A partir do diagramma, os participantes que falam outras línguas são:

$50 - (12 + 9 + 5) = 50 - 26 = 24$



Opção: C

⟵ Nota-se que:
$n(U) = 50$, $n(P) = 21$, $n(I) = 14$ e $n(P \cap I) = 9$.

Os participantes que falam só português são $21 - 9 = 12$.

Os participantes que falam só inglês são $14 - 9 = 5$.

Somente para a Secção de Ciências

36.

Para que os pontos $(0; -3)$, $(k; 7)$ e $(-1; -5)$ sejam colineares, qual deve ser o valor de k?

A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

A equação da recta que passa pelos pontos $(0; -3)$ e $(-1; -5)$ é:

$$y - (-3) = \frac{-5 - (-3)}{-1 - 0}(x - 0) \Leftrightarrow y + 3 = 2x \Leftrightarrow y = 2x - 3$$

Como esta recta também passa pelo ponto $(k; 7)$, tem-se: $7 = 2k - 3 \Leftrightarrow 2k = 10 \Leftrightarrow k = 5$

Opção: B

⟵ A equação da recta que passa pelos pontos $(x_1; y_1)$ e $(y_1; y_2)$ é dada por: $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

⟵ Substitui-se $x = k$ e $y = 7$ em $y = 2x - 3$.

37.

Considere a função f definida pela tabela seguinte:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	1	3	5	2

Qual é o valor de $f[f(4)]$?

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

Pela leitura da tabela, tem-se: $f[\boldsymbol{f(4)}] = f(\mathbf{5}) = 2$

Opção: C

⟵ Pela 5ªcoluna, tem-se $f(4) = 5$ e pela 6ª coluna, tem-se $f(5) = 2$.

38.

Usando a unidade imaginária i, como pode ser escrito o número $\sqrt{-4}$?

A. $-2i$ B. i C. $2i$ D. Não existe

2011.1ªÉpoca

【Resolução】

$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$

Opção: C

⟵ **Definição de número imaginario**:
★ $\sqrt{-1} = i$; ★$i = -1$

39.

Qual é a função cuja primeira derivada em ordem a x é $f(x) = x^3 + 2x$?

A. $\dfrac{x^4}{4} + x^2$ B. $x^4 + x^2$ C. $-\dfrac{x^4}{4} - x^2$ D. $x^4 + 2x$

2011.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Deriva-se a função de cada opção para se encontrar a função cuja primeira derivada é $f(x) = x^3 + 2x$:

A: $\left(\dfrac{x^4}{4} + x^2\right)' = \dfrac{4x^3}{4} + 2x = x^3 + 2x = f(x)$

B: $\left(x^4 + x^2\right)' = 4x^3 + 2x$

C: $\left(-\dfrac{x^4}{4} - x^2\right)' = -\dfrac{4x^3}{4} - 2x = -x^3 - 2x$

D: $(x^4 + 2x)' = 4x^3 + 2$

Portanto, a opção correcta é A.

Opção: A

【**Outra resolução**】

Determina-se a primitiva de $f(x) = x^3 + 2x$.

O integral de $f(x)$, sendo $c \in \mathbb{R}$, é:

$$\int (x^3 + 2x)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + c = \frac{x^4}{4} + x^2 + c$$

Quando $c = 0$, isto será $\dfrac{x^4}{4} + x^2$ da opção A.

$\longleftarrow$ Por $\left(\dfrac{x^4}{4} + x^2\right)' = f(x)$, a opção A é a solução.

$\star$**Definição da função primitiva**:
Sejam $F(x)$ e $f(x)$ duas funções contínuas.
A função $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ para qualquer x do domínio de $f(x)$ se a derivada de $F(x)$ é igual a $f(x)$, isto é, $F'(x) = f(x)$.

$\star$**Definição de integral indefinida**:
Se $f(x)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, chama-se integral indefinida, à expressão $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ e c é uma constante.

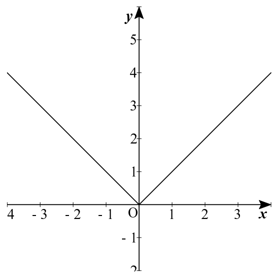
$\boldsymbol{F'(x) = f(x) \Longleftrightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + c}$, onde $c \in \mathbb{R}$.

$\longleftarrow$**Fórmula**: $\int x^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + c$, onde $c \in \mathbb{R}$.

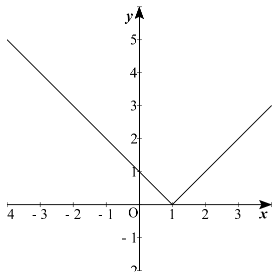
40.

Qual das figuras representa o gráfico da função $f(x) = |1 - x|$?

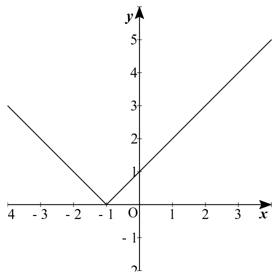
A.



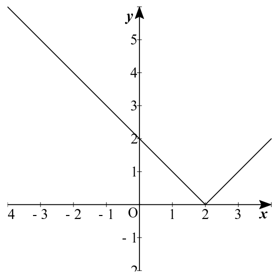
B.



C.



D.



2011.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Substituindo $f(x)$ por y, tem-se: $y = |1 - x| = |x - 1|$.
A opção A representa o gráfico da função de $y = |x|$.
O gráfico de $y = |x - 1|$ obtém-se a partir do gráfico de $y = |x|$ através da translação de 1 unidade para direita. Então, o gráfico de $f(x)$ é da opção B.

Opção: B

【**Outra resolução**】

Substituindo $x = 1$ em $f(x) = |1 - x|$, tem-se:

$$f(1) = |1 - 1| = 0$$

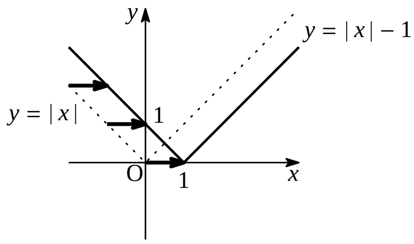
Portanto, o gráfico da função passa pelo ponto $(1; 0)$.
Verifica-se que só o gráfico da opção B passa pelo ponto $(1; 0)$.
Então, a solução é a opção B.

$\longleftarrow$ $y = |1 - x| = |-(x - 1)| = |x - 1|$

$\longleftarrow$ O gráfico da função $y = |x|$ passa pela origem.

$\longleftarrow$ O gráfico da função $y = f(x - p) + q$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = f(x)$ através da translação de p unidades para direita e q unidades para cima.

Os gráficos das função $y = |x|$ e $y = |x - 1|$ são:



FIM

República de Moçambique

Matemática — **Ministério da Educação** — **2ª Época**

12ª Classe / 2011 — **Conselho Nacional de Exames, Certificação e Equivalências** — **120 Minutos**

Esta prova contém 40 perguntas com 4 alternativas de resposta para cada uma. Escolha a alternativa correcta e *RISQUE* a letra correspondente na sua folha de respostas. Responda a todas as primeiras 35 perguntas. As últimas 5 perguntas responda somente às da sua secção (Letras ou Ciências).

【Resolução】

1.

A soma de quaisquer dois números naturais é sempre maior do que zero. Qual é a quantificação correcta?

A. $\exists x; y \in \mathbb{N} : x + y > 0$ B. $\exists x; y \in \mathbb{N} : x + y \geq 0$ C. $\forall x; y \in \mathbb{N} : x + y \geq 0$ D. $\forall x; y \in \mathbb{N} : x + y > 0$

2011. 2ª época

【Resolução】

A soma de quaisquer dois números naturais é sempre maior do que zero.
Isto é: $\forall x; y \in \mathbb{N} : x + y > 0$

Opção: D

Ao símbolo $\forall$ dá-se o nome de quantificador universar e lê-se «qual quer que seja».
Ao símbolo $\exists$ dá-se o nome de quantificador existencial e lê-se «existe pelo menos um».

2.

Considere $p \Rightarrow q$, uma proposição falsa. Qual é o valor lógico das proposições iniciais?

A. Ambas são falsas B. Ambas são verdadeiras
C. p é verdadeira e q é falsa D. p é falsa e q é verdadeira

2011. 2ª época

【Resolução】

Como $p \Rightarrow q$ é uma proposição falsa, então p é verdadeira e q é falsa.

Opção: C

$\longleftarrow$ $p \Rightarrow q$ só é falsa se o antecedente for verdadeiro e o consequente falso.

3.

Qual é o domínio de existência da expressão $\dfrac{x+2}{\sqrt[3]{x}-1}$?

A. $\mathbb{R}$ B. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ C. $]0; +\infty[$ D. $]0; +\infty[\setminus\{1\}$

2011. 2ª época

【Resolução】

Como o denominador é diferente de zero, então tem-se:

$$\sqrt[3]{x} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1^3 \Leftrightarrow x \neq 1$$

Portanto, o domínio é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Opção: B

$\longleftarrow$ Como o índice 3 de $\sqrt[3]{x}$ é ímpar, a expressão $\sqrt[3]{x}$ não tem como condição.
Se o índice fosse par, teria a condição: $x \geq 0$.

4.

Considere $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6$. Qual é o valor de k?

A. -1 B. 0 C. 1 D. 3

2011. 2ª época

【Resolução】

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-1) + 0\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot k\cdot 2$$
$$- [1\cdot(-1)\cdot 1 + 0\cdot k\cdot(-1) + 1\cdot 1\cdot 2]$$
$$= 1 + 2k - (-1+2) = 2k$$

Logo, tem-se: $2k = 6 \Leftrightarrow k = 3$

Opção: D

$\longleftarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - (gec + dbi + ahf)$

5.

Para quaisquer x e y reais positivos, $\lg x \cdot \lg y$ é igual a...

A. $\lg\left(y^{\lg x}\right)$ B. $\lg(x\cdot y)$ C. $\lg(x+y)$ D. $\lg(x)^y$

2011. 2ª época

【Resolução】

$\boldsymbol{\lg x} \cdot \lg y = \lg y^{\boldsymbol{\lg x}}$

Opção: A

$\longleftarrow \forall k \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{k} \log_a x = \log_a x^{\boldsymbol{k}}$

6.

Qual é a solução da equação $\sqrt[3]{2^{x+1}} = 4$?

A. 3^{-1} B. 3 C. 5 D. 2^3

2011. 2ª época

【Resolução】

$\sqrt[3]{2^{x+1}} = 4 \Leftrightarrow 2^{x+1} = 4^3 \Leftrightarrow 2^{x+1} = (2^2)^3 \Leftrightarrow 2^{\boldsymbol{x+1}} = 2^{\boldsymbol{6}}$

$\Leftrightarrow x + 1 = 6 \Leftrightarrow x = 5$

Opção: C

⟵ Eleva-se ambos os membros da equação ao cubo.

⟵ Iguala-se os expoentes porque as bases são iguais.

7.

Sabendo que α é um ângulo do 1° quadrante, a que quadrante pertence o ângulo $\pi - \alpha$?

A. IQ B. IIQ C. $IIIQ$ D. IVQ

2011. 2ª época

【Resolução】

Como α é um ângulo do 1° quadrante, então $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Multiplicando por -1 todos os membros da inquação, tem-se:

$$0 > -\alpha > -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < -\alpha < 0$$

Adicionando π a todos os membros da inquação, tem-ses:

$$\pi - \frac{\pi}{2} < \pi - \alpha < \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \pi - \alpha < \pi$$

Por isso, $\pi - \alpha$ pertence ao 2° quadrante.

Opção: B

【Outra resolução】

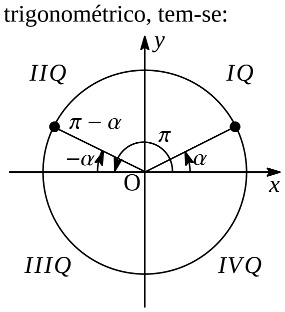
Para se obter a solução, trata-se de um ângulo do 1° quadrante.

Por exemplo, o ângulo $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$ pertence ao 1° quadrante.

Neste caso, tem-se: $\pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{4} = 180° - 45° = 135°$

Como 135° perternce ao 2° quadrante, conclui-se que $\pi - \alpha$ pertence ao 2° quadrante.

No circulo trigonométrico, tem-se:



$\pi - \alpha$ pertence ao 2° quadrante.

$\longleftarrow \pi = 180°$

8.

Para alcançar o 1° andar da sua escola, a Marília tem de subir uma rampa de 40m de comprimento, que forma com o solo, um ângulo de 30°. Alcançado o 1° andar, a quantos metros do solo a Marília estará?

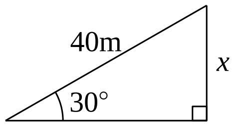
A. 20m B. $10\sqrt{3}$m C. $20\sqrt{3}$m D. 80m

2011. 2ª época

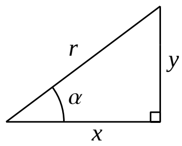
【Resolução】

Pela leitura da figura, tem-se:

$$\text{sen}30° = \frac{x}{40} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{40}$$
$$\Leftrightarrow 2x = 40 \Leftrightarrow x = 20$$



Opção: A



★ $\text{sen}\alpha = \frac{y}{r}$
★ $\cos\alpha = \frac{x}{r}$
★ $\text{tg}\alpha = \frac{y}{x}$

9.

A distância entre os pontos da recta numérica cujas abcissas são x e -2 é igual a 4. Como se escreve simbolicamente esta afirmação?

A. $|x-4| = 2$ B. $|x+4| = 2$ C. $|x-2| = 4$ D. $|x+2| = 4$

2011. 2ª época

【Resolução】

A distâcia entre x e -2 é dada por:

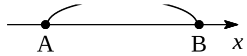
$|x-(-2)| = |x+2|$ ou $|-2-x| = |-(x+2)| = |x+2|$

Por isso, a solução é $|x+2| = 4$

Opção: D

⟵ A distância entre os pontos A(a) e B(b) situados no eixo das abcissas é $\overline{AB} = |b-a|$ ou $\overline{AB} = |a-b|$

$|b-a|$ ou $|a-b|$



10.

Qual é o conjunto solução da equação $|3x-1| = 5$?

A. $\left\{\frac{4}{3}; 2\right\}$ B. $\left\{-2; \frac{4}{3}\right\}$ C. $\left\{-\frac{4}{3}; 2\right\}$ D. $\left\{-2; -\frac{4}{3}\right\}$

2011. 2ª época

【Resolução】

$$|3x-1| = 5 \Leftrightarrow 3x-1 = 5 \lor 3x-1 = -5$$
$$\Leftrightarrow 3x = 6 \lor 3x = -4$$
$$\Leftrightarrow x = 2 \lor x = -\frac{4}{3}$$

Opção: C

⟵ **Equação modular do tipo** $|x| = a$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$:

★$|x| = a \Leftrightarrow x = a \lor x = -a$

11.

De quantas maneiras diferentes pode-se guardar numa prateleira, dois pares de sapatos e três de chinelos, de modo que os calçados do mesmo tipo fiquem lado a lado?

A. 48 B. 24 C. 12 D. 4

2011. 2ª época

【Resolução】

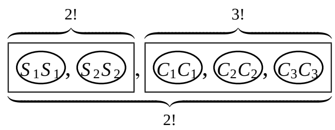
Considera-se que os dois pares de sapatos S_1S_1 e S_2S_2 são uma única letra S e os três pares de chinelos C_1C_1, C_2C_2 e C_3C_3 são uma única letra C.

Logo, as maneiras de permutar duas letras S e C numa fila são 2!.

As maneiras de permutar os dois pares de sapatos numa fila e os três de chinelos numa fila são respectivamente 2! e 3!.

Por isso, as maneiras procuradas são $2! \cdot 2! \cdot 3! = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Opção: B



⟵$P_n = n!$ é igual ao número total das maneiras diferentes possíveis de permutar n elementos numa fila.

⟵$n! = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}_{n \text{ factores}}$

12.

Quantos números de três algarismos diferentes podem ser escritos com os elementos do conjunto $\{1; 3; 7; 8; 9\}$?

A. 6 B. 10 C. 60 D. 120

2011. 2ª época

【**Resolução**】

O conjunto tem 5 elementos. Então o número procurado é igual ao número total das maneiras diferentes possíveis de escolher 3 elementos dentre 5 elementos e em seguida permutar os 3 elementos entre si.
Como interessa a ordem, trata-se de um arranjo de 5 elementos tomados 3 a 3.
Portanto, tem-se: $A_3^5 = \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3}_{\text{3 factores}} = 60$

Opção: C

⟵ $\mathbf{A_p^n}$ é o número total das maneiras possiveis de **escolher** p elementos dentre n elementos e **permutar** os p elementos. Quando **interessa a ordem**, aplica-se um arranjo A_n^p. Quando não interessa a ordem, aplica-se uma combinação C_p^n.

⟵ $A_p^n = \dfrac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ factores}}$

13.
A Maria pretende ter filhos. Sabe-se que a probabilidade de NÃO engravidar por mês é de $0,3$. Qual é a probabilidade de engravidar por mês?

A. 1 B. $0,7$ C. $0,5$ D. $0,3$

2011. 2ª época

【**Resolução**】

Como a probabilidade de não engravidar por mês é de $0,3$, então a probabilidade de engravidar por mês é: $1 - 0,3 = 0,7$

Opção: B

⟵ A probabilidade do acontecimento $\overline{A}$ (não A) é igual a 1 menos a probabilidade do acontecimento A. Isto é: $\boldsymbol{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$

14.
Lança-se, uma vez, um dado equilibrado, de faces numeradas de 1 a 6. Qual será a probabilidade de sair um número ímpar?

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

2011. 2ª época

【**Resolução**】

Se A é um acontecimento de sair um número ímpar, então $A = \{1, 3, 5\}$.
Logo, o número de casos possíveis é 6 e o número de casos favoráveis é 3.
Logo, a probabilidade de sair um número ímpar é: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Opção: C

⟵ O conjunto A tem 3 elementos.

⟵ A probabilidade de um acontecimento A é dada por:
$$p(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

15.
Sejam $3p - 4; 4p - 3; 7p - 6$, três primeiros termos de uma progressão aritmética. Qual é o valor de p?

A. -2 B. 1 C. 2 D. 4

2011. 2ª época

【**Resolução**】

Como a sucessão é uma PA, então a diferença entre dois termos consectivos é constante. Por isso, tem-se:
$$(4p-3) - (3p-4) = (7p-6) - (4p-3)$$
$$\Leftrightarrow p + 1 = 3p - 3 \Leftrightarrow -2p = -4 \Leftrightarrow p = 2$$

Opção: C

⟵ Diz-se que uma sucessão é uma PA se a diferença entre dois termos consecutivos é constante.

⟵ A diferença entre 1° termo e 2° termo é $(4p-3)-(3p-4)$.
A diferença entre 2° termo e 3° termo é $(7p-6)-(4p-3)$.

16.
Considere uma progressão geométrica de razão igual a 2, cujo primeiro termo é 3. Qual é a posição do termo 192?

A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

2011. 2ª época

【**Resolução**】

O termo geral da PG em que $a_1 = 3$ e $q = 2$ é: $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.
Resolve-se a equação $a_n = 192$:

$$3 \cdot 2^{n-1} = 192 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 64 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^6$$
$$\Leftrightarrow n - 1 = 6 \Leftrightarrow n = 7$$

Opção: B

⟵ O termo geral de uma **PG** é $\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$.
O termo geral de uma **PA** é $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$.

⟵ $a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$

17.

Quantos números pares de 3 algarismos, menores do que 200, existem?

A. 150　　B. 100　　C. 50　　D. 25

2011. 2ª época

【**Resolução**】

Os pares de 3 algarismos menores do que 200 são:

$100, 102, 104, \cdots, 196, 198$

Isto é: $2 \cdot \mathbf{50},\ 2 \cdot \mathbf{51},\ 2 \cdot \mathbf{52}, \cdots, 2 \cdot \mathbf{98},\ 2 \cdot \mathbf{99}$

Então, os números são: $\mathbf{99} - \mathbf{50} + 1 = 50$

Opção: C

⟵ Os pares são múltiplos de 2.

⟵ Os números da sucessão dos números naturais consectivos cujo primeiro termo é $\boldsymbol{n}$ e o último termo é $\boldsymbol{m}$ são encontrados por $\boldsymbol{m - n + 1}$.

18.

A soma dos três primeiros termos de uma progressão aritmética é 27 e o produto dos dois primeiros termos é 36. Qual é o primeiro termo da sucessão?

A. 4　　B. 5　　C. 9　　D. 27

2011. 2ª época

【**Resolução**】

Como a sucessão é uma PA, tem-se:

$a_2 = a_1 + d \quad \text{e} \quad a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$

Pela condição, tem-se:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 27 \\ a_1 \cdot a_2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 27 \\ a_1(a_1 + d) = 36 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a_1 + 3d = 27 \cdots ① \\ a_1(a_1 + d) = 36 \cdots ② \end{cases}$$

Por ①, $3(a_1 + d) = 27 \Leftrightarrow a_1 + d = 9$.
Substituindo $a_1 + d$ por 9 em ②, tem-se: $a_1 \cdot 9 = 36 \Leftrightarrow a_1 = 4$

Opção: A

⟵ $a_1, \quad a_2, \quad a_3; \quad a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$
$+d \quad +d$

⟵ Substitui-se a_2 por $a_1 + d$ e a_3 por $a_1 + 2d$.

⟵ Substitui-se a_2 por $a_1 + d$.

19.

Um automóvel percorreu no primeiro dia de viagem $x$km, no segundo dia percorreu o dobro de x e no terceiro dia percorreu o triplo de x, assim sucessivamente. Até ao fim de 10 dias, percorreu uma distância total de 1650km. Quantos quilómetros o automóvel percorreu no primeiro dia de viagem?

A. 165km　　B. 60km　　C. 30km　　D. 15km

2011. 2ª época

【**Resolução**】

A distância percorrida pelo automóvel representa-se pela seguinte sucessão: $x, 2x, 3x, \cdots$
Esta sucessão é uma PA em que $a_1 = x$ e $d = x$.
Até ao fim de 10 dias, o automóvel percorreu uma distância que é igual à soma dos10 primeiros termos, isto é:

$$S_{10} = \frac{10[2 \cdot x + (10-1)x]}{2} = \frac{110x}{2} = 55x$$

Como até ao fim de 10 dias, percorreu uma distância total de 1650km, tem-se: $55x = 1650 \Leftrightarrow x = 30$

Opção: C

⟵ $x, \quad 2x, \quad 3x, \quad \cdots$
$+x \quad +x \quad +x$

⟵ A soma de uma PA de n primeiros termos é dada por:
$S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$ ou $S_n = \dfrac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$

20.
Qual é a classificação da função $f(x) = \cos x + 2$ quanto à paridade?
A. Par B. Ímpar C. Não par nem ímpar D. Par e ímpar
2011. 2ª época

【Resolução】
Calcula-se: $\boldsymbol{f(-x)} = \cos(-x) + 2$
$= \cos x + 2 = \boldsymbol{f(x)}$
Como $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$, então f é par.

Opção: A

$\longleftarrow$ $\boldsymbol{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}$; $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\alpha$
$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\alpha$; $\text{cotg}(-\alpha) - \text{cotg}\alpha$

$\longleftarrow$ Se $f(-x) = f(x)$, então f é par.
Se $f(-x) = -f(-x)$, então f é ímpar.

21.
Qual é a equação da assímptota horizontal do gráfico da função $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$?
A. $x = -1$ B. $y = -1$ C. $x = 0$ D. $y = 0$
2011. 2ª época

【Resolução】
A função $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ é homográfica.
Como $f(x) = \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{\mathbf{0} \cdot x + 2}{\mathbf{1} \cdot x + 1}$, a equação da assímptota horizontal é $y = \dfrac{\mathbf{0}}{\mathbf{1}} = 0$.

Opção: D

$\longleftarrow$ Uma função do tipo $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ é homográfica cujas assímptotas vertiacal e horizontal são dadas pelas seguintes equações:
★AV : $x = -\dfrac{d}{c}$ ($\leftarrow$ Zero do denominador)
★AH : $y = \dfrac{a}{c}$ ($\leftarrow$ Quociente dos coeficientes de x)

22.
O gráfico de uma função do primeiro grau passa pelo ponto $(4; 0)$ e pelo vértice da parábola dada pela expressão $y = x^2 - 2x$. Qual é a expressão analítica dessa função do primeiro grau?
A. $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{4}{3}$ B. $y = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{4}{3}$ C. $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$ D. $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{4}{3}$
2011. 2ª época

【Resolução】
Calcula-se o ponto do vértice de $y = x^2 - 2x$ fazendo o quadrado perfeito: $y = x^2 - 2x = (x - \mathbf{1})^2 \mathbf{- 1}$
Logo, o ponto do vértice é $(\mathbf{1}; \mathbf{-1})$.
Portanto, a equação da recta que passa pelos pontos $(4; 0)$ e $(1; -1)$ é: $y - 0 = \dfrac{-1-0}{1-4}(x-4) \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{4}{3}$

Opção: A

$\longleftarrow$ O ponto do vértice do gráfico de uma função quadrática $y = a(x - \boldsymbol{p})^2 + \boldsymbol{q}$ é $(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{q})$.

$\longleftarrow$ A equação da recta que passa pelos pontos $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ é dada por $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

【Outra resolução】
Pela fórmula, o ponto do vértice de $y = x^2 - 2x$ é:
$$\left(-\frac{b}{2a}; \frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{-2}{2}; \frac{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}{4}\right) = (1; -1)$$
Continua-se de mesmo modo que Resolução··············

$\longleftarrow$ **Fórmula para obtenção o ponto do vértice**:
O ponto do vértice da parábola dada pela expressão $y = ax^2 + bx + c$ é: $\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{\Delta}{4a}\right)$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

23.
Os gráficos das $f(x) = a^x$ e $g(x) = x^2 - 1$ interceptam-se num ponto de abcissa 3. Qual é o valor de a?
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
2011. 2ª época

【Resolução】
$f(3) = a^3$ e $g(3) = 3^2 - 1 = 8$
Pela condição, tem-se:
$f(3) = g(3) \Leftrightarrow a^3 = 3^2 - 1 \Leftrightarrow a^3 = 8 \Leftrightarrow a^3 = 2^3 \Leftrightarrow a = 2$

Opção: B

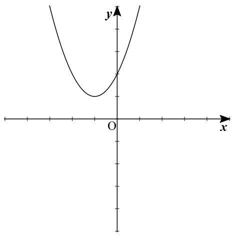
$\longleftarrow$ Substitui-se x por 3 nas funções $f(x)$ e $g(x)$.

$\longleftarrow$ Numa igualdade de duas potências com mesmo expoente ímpar iguala-se as bases, isto é, se m é um número ímpar, então $a^m = b^m \Leftrightarrow a = b$.

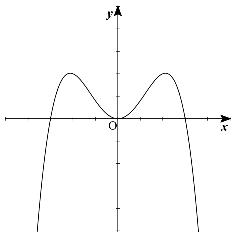
24.

Qual dos gráficos representa uma função injectiva?

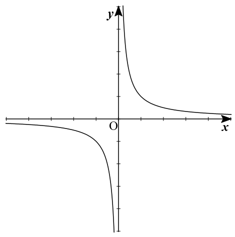
A.



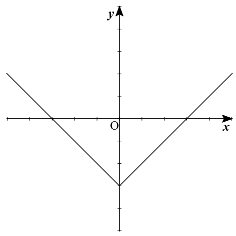
B.



C.



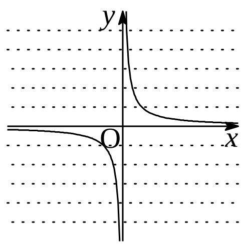
D.



2011. 2ª época

【**Resolução**】

O gráfico da opção C representa uma função injectiva porque nenhuma recta horizontal corta o gráfico em mais um ponto. Os gráficos das opções A, B, e D não são injectivas porque algumas rectas horizontais cortam os gráficos em mais um ponto.



Opção: C

⟵ ⋆Se nenhuma recta horizontal corta o gráfico de f em mais um ponto, então f é injectiva.

⋆Se toda recta horizontal corta o gráfico de f, então f é sobrejectiva.

⋆Se toda recta corta o gráfico de f em um sóponto, então f é bijectiva.
(Se uma função f é simultaneamente injectiva e sobrejectiva, então f é bijectiva.)

25.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$?

A. -1 B. 0 C. 1 D. $+\infty$

2011. 2ª época

【**Resolução**】

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}) = +\infty$$

Opção: D

⟵ $\infty+\infty=\infty$

26.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$?

A. 0 B. $\dfrac{1}{4}$ C. $\dfrac{1}{2}$ D. 1

2011. 2ª época

【**Resolução**】

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

Opção: C

⟵ Multiplica-se o numerador e o denominador pelo conjugado $\sqrt{x}+1$ de $\sqrt{x}-1$.

⟵ $(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1) = (\sqrt{x})^2-1^2 = x-1$

⟵ Substitui-se x por 1.

27.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$?

A. -2 B. 0 C. e^{-2} D. e^2

2011. 2ª época

【**Resolução**】

$$\lim_{x\to0}(1-x)^{\frac{2}{x}} = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x\to0}(1-x-1)\cdot\frac{2}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to0}(-2)} = e^{-2}$$

Opção: C

⟵ Sejam $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$ e $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$. Então tem-se:
$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\cdot g(x)}$

28.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x-4}{|x-2|}$?

A. -2 B. 1 C. 2 D. ∞

2011. 2ª época

【**Resolução**】

Quando $x \to 2^-$, $x < 2$. Logo, $|x-2| = -(x-2)$.
Portanto, tem-se:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2x-4}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2\cancel{(x-2)}}{-\cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2}{-1} = -2$$

Opção: A

⟵ $x \to 2^-$ significa que x se aproxima de 2 pela esquerda. Portanto, $x \to 2^-$ é $x < 2$.

$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{se } x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2 \end{cases}$

29.

Considere a função $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$.
Em que ponto a função tem um ponto de descontinuidade eliminável?

A. -3 B. -2 C. 2 D. 3

2011. 2ª época

【**Resolução**】

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \frac{x-2}{(x-2)(x-3)}$$

⟵ Factoriza-se x^2-5x+6 aplicando $x^2+(a+b)x+ab = (x+a)(x+b)$.

Como o denominador é diferente de zero, tem-se a condição:

$$x^2-5x+6 \neq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3 \wedge x \neq 2$$

Por isso, a função não está definida nos pontos $x = 2$ e $x = 3$, isto é, $\nexists f(2)$ e $\nexists f(3)$.
Logo, a função é descontínua nos pontos $x = 2$ e $x = 3$.

⟵ Se não existe o valor de $f(a)$, a função $f(x)$ é descontínua no ponto $x = a$.

Se $x \neq 2$ e $x \neq 3$, então $f(x) = \dfrac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(x-3)} = \dfrac{1}{x-3}$.

Verifica-se se existem $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

Como $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-3} = -1$, **existe** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 2} f(x)}$.
Então, a função $f(x)$ tem um ponto de descontinuidade **eliminável** em $x = 2$.

⟵ A função f tem uma **descontinuidade eliminável** em $x = a$ se $\boldsymbol{\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)}$ mas $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)}$

Os limites laterais no ponto $x = 3$ são:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$$

⟵ $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$$

⟵ $\dfrac{1}{0^-} = -\infty$

Como os limites laterais são diferentes, **não existe** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 3} f(x)}$.

⟵ ⋆ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha$
⋆ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \Leftrightarrow \nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$

Por isso, a função $f(x)$ tem um ponto de descontinuidade **não eliminável** em $x = 3$.

⟵ A função f tem uma **descontinuidade eliminável** em $x = a$ se $\boldsymbol{\nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)}$.

Opção: C

30.

Qual é a 1ª derivada da função $f(x) = \cos(x^2+1)$?

A. $-2x\text{sen}(x^2+1)$ B. $-2x\text{sen}(x^2-1)$ C. $\text{sen}(x^2-1)$ D. $2x\text{sen}(x^2+1)$

2011. 2ª época

【**Resolução**】

$$f'(x) = [\cos(x^2+1)]' = -\text{sen}(x^2+1)\cdot(x^2+1)'$$
$$= -\text{sen}(x^2+1)\cdot 2x = -2x\text{sen}(x^2+1)$$

Opção: A

⟵ **Derivada de uma função composta**:
$[\cos f(x)]' = -\text{sen} f(x) \cdot f'(x)$ porque $(\cos x)' = -\text{sen} x$.

31.

Qual é a 1ª derivada da função $f(x) = e^{\sqrt{2x}}$?

A. $\dfrac{e^{\sqrt{2x}} \cdot \sqrt{2x}}{x}$ B. $\dfrac{e^{\sqrt{2x}} \cdot \sqrt{2x}}{2x}$ C. $\dfrac{e^{\sqrt{2x}} \cdot \sqrt{x}}{2x}$ D. $\dfrac{e^{\sqrt{2x}} \cdot \sqrt{2}}{x}$

2011. 2ª época

【**Resolução**】

$$f'(x) = [e^{\sqrt{2x}}]' = e^{\sqrt{2x}} \cdot \left(\sqrt{2x}\right)' = e^{\sqrt{2x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot (2x)'$$

$$= \frac{e^{\sqrt{2x}} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2x}} = \frac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}} = \frac{e^{\sqrt{2x}} \cdot \sqrt{2x}}{2x}$$

Opção: B

⟵ $[e^{f(x)}]' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$ porque $(e^x)' = e^x$;
$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$ porque $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
⟵ Racionaliza-se a fracção, multiplicando por $\sqrt{2x}$ ambos os termos da fracção.

32.

Qual é a 2ª derivada da função $f(x) = \text{tg}x$?

A. $-\dfrac{2\text{tg}x}{\cos^2 x}$ B. $\dfrac{1}{\cos^4 x}$ C. $\dfrac{\text{tg}x}{\cos^2 x}$ D. $\dfrac{2\text{tg}x}{\cos^2 x}$

2011. 2ª época

【**Resolução**】

A primeira derivada de $f(x)$ é:

$$f'(x) = (\text{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = (\cos x)^{-2}$$

⟵ $(\text{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Então, a segunda derivada de $f(x)$ é:

$$f''(x) = [(\cos x)^{-2}]' = -2(\cos x)^{-3} \cdot (\cos x)'$$

⟵ $[f(x)^n]' = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x)$ porque $(x^n)' = nx^{n-1}$.

$$= -2 \cdot \frac{1}{\cos^3 x} \cdot (-\text{sen}x) = \frac{2\text{sen}x}{\cos^3 x}$$

⟵ $(\cos x)' = -\text{sen}x$

$$= \frac{2\mathbf{sen}\boldsymbol{x}}{\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x} \cdot \cos^2 x} = \frac{2\mathbf{tg}\boldsymbol{x}}{\cos^2 x}$$

⟵ $\dfrac{\text{sen}x}{\cos x} = \text{tg}x$

Opção: D

33.

Seja $y = (k-1)x + 2$ a equação da recta tangente ao gráfico da função $y = x^3 + 1$ no ponto de abcissa $x = 1$. Qual é o valor de k?

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

2011. 2ª época

【**Resolução**】

Sendo $f(x) = x^3 + 1$, $f'(1)$ é igual ao declive da recta tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 + 1$ no ponto $x = 1$.

⟵ O valor de $f'(a)$ é igual ao declive da recta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ em $x = a$.

Como $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$, então $f'(1) = 3$.

⟵ Aplicando $(x^n)' = x^{n-1}$, $(x^3)' = 3x^2$.

Como o declive da recta $y = (\boldsymbol{k-1})x + 2$ é $\boldsymbol{k-1}$, então tem-se:

⟵ O declive da recta $y = ax + b$ é a(Coeficiente de x).

$$k - 1 = 3 \Leftrightarrow k = 4$$

Opção: A

34.

Qual é a abcissa do extremo máximo do gráfico da função $f(x) = -x^2 + 1$?

A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

2011. 2ª época

【**Resolução**】

Calcula-se: $f'(x) = (-x^2 + 1)' = -2x$

⟵ $(x^2)' = 2x$; $\forall k \in \mathbb{R}, (k)' = 0$

Calcula-se os zeros de $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

⟵ Há possibilidade de ter um extremo no ponto $x = 0$.

Constroi-se a tabela de monotonia e extremos.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$

A partir da tabela, $f(x)$ tem para $x = 0$ o extremo máximo -1.
Por isso, a abcissa do extremo máximo de $f(x)$ é $x = 0$

Opção: C

⟵ Se $f'(x) < 0$, então $f(x)$ é decrescente.
Se $f'(x) > 0$, então $f(x)$ é crescente.
Se $f'(x) = 0$, então $f(x)$ é constante.

⟵ $f(x)$ tem para $x = a$ um extremo máximo se $f(a) = 0$ e $f'(x)$ passa em $x = a$ de positiva a negativa.
$f(x)$ tem para $x = a$ um extremo mínimo se $f(a) = 0$ e $f'(x)$ passa em $x = a$ de negativa a positiva.

35.

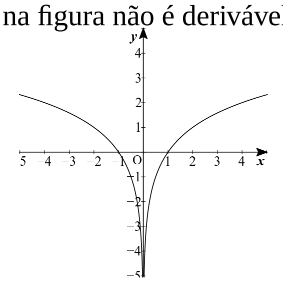
Em que valor de x a função representada na figura não é derivável?

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2



2011. 2ª época

【Resolução】

Por observação do gráfico, a função é descontínua em $x = 0$ porque não existe o valor de $f(0)$.
Logo, a função não é derivável em $x = 0$.

Opção: B

⟵ A descontinuidade pode acontecer ou porque a função apresenta um **furo**, ou dá **salto** nesse ponto.

⟵ Se uma função é descontínua em $x = a$, então a função não é derivável nesse ponto.

Somente para a Secção de Letras

36.

Considere os conjuntos $M = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x \leq 6\}$ e $N = \{x \in \mathbb{R} : x < 3\}$. Qual é o conjunto $M \setminus N$?

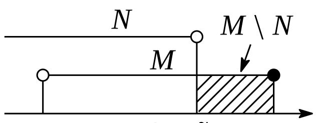
A. $[3; 6]$ B. $]3; 6]$ C. $]-\infty; -2] \cup [2; 6]$ D. $]-\infty; -2]\cup]2; 6]$

2011. 2ª época

【Resolução】

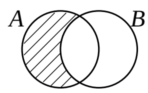
Pela leitura da figura,

$M \setminus N = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x \leq 6\}$
$= [3; 6]$



Opção: A

⟵ $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\}$



37.

Qual é a expressão equivalente à $\overline{N} \cap (\overline{M} \cup N)$?

A. $\overline{M}$ B. $\overline{N}$ C. $\overline{M \cap N}$ D. $\overline{M \cup N}$

2011. 2ª época

【Resolução】

$$\begin{aligned}\overline{N} \cap (\overline{M} \cup N) &= (\overline{N} \cap \overline{M}) \cup (\overline{N} \cap N)\\ &= (\overline{N} \cap \overline{M}) \cup \emptyset\\ &= \overline{N} \cap \overline{M}\\ &= \overline{M} \cap \overline{N}\\ &= \overline{M \cup N}\end{aligned}$$

Opção: D

⟵ **Lei Distributiva**: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
⟵ **Lei do Complementar**: $A \cap \overline{A} = \emptyset$
⟵ **Lei de Identidade**: $A \cup \emptyset = A$
⟵ **Lei Comutativa**: $A \cap B = B \cap A$
⟵ **Leis de De Morgan**: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

38.

Uma prova tinha duas questões, 30 alunos acertaram somente uma questão, 24 acertaram a segunda questão, 10 acertaram as duas questões, 26 erraram a primeira questão.
Quantos alunos não acertaram nenhuma das questões?

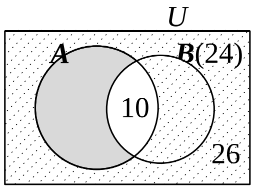
A. 12 B. 24 C. 26 D. 56

2011. 2ª época

【**Resolução**】

Sejam:
U- Conjunto dos alunos que fizeram a prova;
A - Conjunto dos alunos que acertaram a 1ªquestão;
B - Conjunto dos alunos que acertaram a 2ªquestão.

Então pode-se construir o diagrama de Venn como a figura mostra.



Os alunos que acertaram somente a 2ª questão são: $24 - 10 = 14$
Os alunos que acertaram somente a 1ª questão são: $30 - 14 = 16$
Por isso, os alunos que não acertaram nenhuma das questões são: $26 - 14 = 12$

Opção: A

⟵ Nota-se que:
$n(A \cup B) - n(A \cap B) = 30$, $n(B) = 24$, $n(A \cap B)=10$ e $n(\overline{A}) = 26$.

⟵ 24 acertaram a 2ª questão e 10 acertaram as duas questões.

⟵ 30 acertaram somente uma questão e 14 acertaram somente a 2ªquestã.

⟵ 26 erraram a primeira questão e 14 acertaram somente a 2ªquestão.

39.

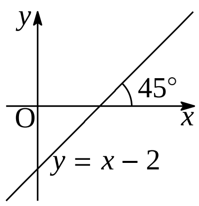
Qual é o ângulo formado entre a recta de equação $y = x - 2$ e o sentido positivo do eixo das abcissas?

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

2011. 2ª época

【**Resolução**】

O declive da recta $y = x - 2$ é 1 porque o coeficiente de x é 1.
Seja α o ângulo formado entre a recta $y = -2$ e o sentido positivo do eixo das abcissas.
Então tem-se:
$\text{tg}\alpha = 1$, onde $0° \leq \alpha < 180°$
Logo, $\alpha = 45°$.



Opção: B

⟵ O declive da recta dada pela equação $y = \boldsymbol{a}x + b$ é $\boldsymbol{a}$.

⟵ O declive (coeficiente angular) da recta que forma um ângulo $\boldsymbol{\alpha}$ com o sentido positivo do eixo das abcissas é igual a $\mathbf{tg}\boldsymbol{\alpha}$, onde $0° \leq \alpha < 180°$.

40.

Considere as aplicações $Q : 2x^2 + 2y = 4$, $T : 2x + 2y^2 = 4$, $P : 2x + 2y = 4$ e $M : 2x + 2y^2 - 2xy = 4$.
Quais destas aplicações correspondem a funções?

A. Q e P B. Q e T C. T e M D. P e M

2011. 2ª época

【**Resolução**】

Os graus de y das aplicações de T e M são pares.
Por isso, estas aplicações não são funções.
Os graus de y das aplicações de Q e P são ímpares.
Logo, estas funções são funções.
A aplicação Q é uma função quadrática e a aplicação P é uma função do primeiro grau.

Opção: A

⟵ **Definição da função**:
Uma função f é uma correspondência entre um conjunto A e um conjunto B se a cada elemento x de A correspende um e só um elemento y de B.

Por isso, se o grau de y é par, y não é nenhuma função, porque neste caso alguns elementos de x correspondem a mais de um elemento y.

Somente para a Secção de Ciências

36.
Qual é a equação reduzida da circunferência de centro C(2; 3) e que passa pelo ponto P(−1; 5)?
A. $(x-2)^2+(y-3)^2 = 26$ B. $(x+2)^2+(y+3)^2 = 13$ C. $x^2+y^2 = 13$ D. $(x-2)^2+(y-3)^2 = 13$

2011. 2ª época

【Resolução】
Como a distância entre dois pontos C(2; 3) e P(−1; 5) é igual ao raio r da circunferência, então tem-se:

$$r = \sqrt{(-1-2)^2+(5-3)^2} = \sqrt{13}$$

⟵ A distância entre dois pontos $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ é dada por $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Logo, a equação reduzida da circunferência do centro C(2; 3) e o raio $\sqrt{13}$ é dada por:

$$(x-2)^2+(y-3)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-3)^2 = 13$$

Opção: D

⟵ A equação reduzida da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r é dada por $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$.

37.
Usando a unidade imaginária i, como pode ser escrito o número $\frac{5}{6} - \sqrt{-18}$?
A. $\frac{5}{6} - 9i$ B. $\frac{5}{6} - 3\sqrt{2}i$ C. $\frac{5}{6} - 3i$ D. $\frac{5}{6} + 3\sqrt{2}i$

2011. 2ª época

【Resolução】

$$\frac{5}{6} - \sqrt{-18} = \frac{5}{6} - \sqrt{18}\cdot \boldsymbol{\sqrt{-1}} = \frac{5}{6} - \sqrt{3^2\cdot 2}\cdot \boldsymbol{i} = \frac{5}{6} - 3\sqrt{2}i$$

Opção: B

⟵ **Definição de númro imaginário**:
★ $\sqrt{-1} = i$; ★ $i^2 = -1$

38.
Qual é a primitiva da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$?
A. $\frac{1}{x}$ B. $\frac{1}{x^2}$ C. $-\frac{1}{x}$ D. $-\frac{1}{x^2}$

2011. 2ª época

【Resolução】
Deriva-se a função de cada opção para se encontrar a função cuja primeira derivada é $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

A. $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ ⟵ $\boldsymbol{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$

B. $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$ ⟵ $\forall n \in \mathbb{R}, (x^n)' = nx^{n-1}$

C. $\boldsymbol{\left(-\frac{1}{x}\right)'} = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} = \boldsymbol{f(x)}$

D. $\left(-\frac{1}{x^2}\right)' = -\left(-\frac{2}{x^3}\right) = \frac{2}{x^3}$

Como a derivada da função da opção C é igual a $f(x) = \frac{1}{x^2}$, a função da opção C é a primitiva da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Opção: C

⟵ **Definição da função primitiva**:
Sejam $F(x)$ e $f(x)$ duas funções contínuas.
A função $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ para qualquer x do domínio de $f(x)$ se a derivada de $F(x)$ é igual a $f(x)$, isto é, $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$.

【**Outra resolução**】

Determina-se a primitiva da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

O integral de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ é:

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}dx = \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + c$$
$$= -x^{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$$

Por isso, quando $c = 0$, será igual a $-\dfrac{1}{x}$ da alternativa C.

Então, conclui-se que $-\dfrac{1}{x}$ é a primitiva da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

⟵ **Fórmula**: $\int x^n dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + c$, onde $c \in \mathbb{R}$.

Definição de integral indefinida:
Se $f(x)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$, chama-se integral indefinida, à expressão $\int f(x)\,dx = F(x)+c$, onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ e c é uma constante.

$\boldsymbol{F'(x) = f(x) \Longleftrightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + c}$, onde $c \in \mathbb{R}$.

39.

Dada a função $h(x) = 4x + 2$, qual é o valor de $(hoh)(-1)$?

A. -6 B. -4 C. -3 D. -2

2011. 2ª época

【**Resolução**】

Calcula-se: $h(-1) = 4 \cdot (-1) + 2 = -2$.

Então: $(hoh)(-1) = h[\boldsymbol{h(-1)}]$

$= h(\mathbf{-2}) = 4(-2) + 2 = -6$

Opção: A

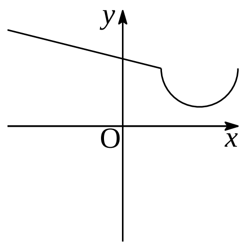
⟵ Substitui-se x por -1 em $h(x) = 4x + 2$.

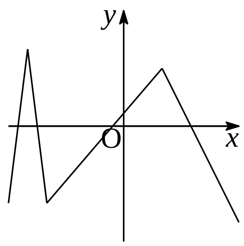
⟵ **Função composta**: $(fog)(x) = f[g(x)]$

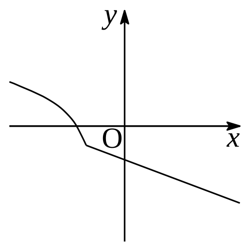
⟵ Para se calcular $h(-2)$, substitui-se x por -2 em $h(x) = 4x + 2$.

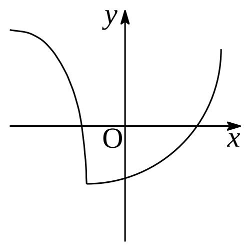
40.

Qual das figuras pode representar o gráfico de uma função invertível?

A.


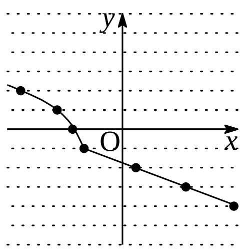
B.


C.


D.


2011. 2ª época

【**Resolução**】



Para que uma função seja invertível, é necessário que a função seja injectiva.
A função representada no gráficao da opção C é injectiva porque nenhuma recta horizontal corta o gráfico em mais um ponto.
Como a função da opção C é injectiva, então esta função é invertível.
Como as funções representadas nos gráficos das opções A, B e D não são injectivas, estas funções não são invertíveis.

Opção: C

⟵ Se uma função $f(x)$ é injectiva, então a função $f(x)$ é ivertível.

⟵ ★Se nenhuma recta horizontal corta o gráfico de f em mais um ponto, então f é injectiva.

★Se toda recta horizontal corta o gráfico de f, então f é sobrejectiva.

★Se toda recta corta o gráfico de f em um sóponto, então f é bijectiva.
(Se uma função f é simultaneamente injectiva e sobrejectiva, então f é bijectiva.)

FIM

Esta prova contém 40 perguntas com 4 alternativas de resposta para cada uma. Escolha a alternativa correcta e *RISQUE* a letra correspondente na sua folha de respostas. Responda a todas as primeiras 35 perguntas. As últimas 5 perguntas responda somente às da sua secção (Letras ou Ciências).

【Resolução】

1.

Sendo p e q duas proposições verdadeiras então...

A. $p \vee q$ é falsa. B. $\sim (p \wedge q)$ é verdadeira.
C. $\sim p \vee \sim q$ é falsa. D. $p \Rightarrow q$ é falsa.

2010. Extraordinário

【Resolução】

A. Como p e q são verdadeiras, então $p \vee q$ é verdadeira. Logo, a opção A não é correcta.
B. Como $p \wedge q$ é verdadeira, $\sim (p \wedge q)$ é falsa. Logo, a opção B não é correcta.
C. Como $\sim p$ e $\sim q$ são falsas, $\sim p \vee \sim q$ é falsa. Logo, a opção C não é correcta.
D. $p \Rightarrow q$ é falsa. Logo, a opção D é correta.

Opção: D

⟵ $p \vee q$ só é falsa se ambas as proposições são falsas.

⟵ $p \wedge q$ só é verdadeira se ambas as proposições são verdadeiras.

⟵ Se uma proposição p é verdadeira, a sua negação $\sim p$ é falsa e vice-versa.

⟵ $p \Rightarrow q$ só é falsa se o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso.

2.

Qual é a negação de $\forall x \in \mathbb{R}; x + 1 \neq 3$?

A. $\exists! x \in \mathbb{R}; x + 1 = 3$ B. $\forall x \in \mathbb{R}; x + 1 = 3$ C. $\forall x \in \mathbb{R}; x - 1 \neq 3$ D. $\exists! x \in \mathbb{R}; x - 1 = 3$

2010. Extraordinário

【Resolução】

Pelas segundas leis de De Morgan, tem-se:

"$\sim (\forall x \in \mathbb{R}; x + 1 \neq 3)$" é "$\exists! x \in \mathbb{R} : x + 1 = 3$"

Opção: A

⟵ **Segundas leis de De Morgan**
Seja p uma proposição qualquer. Então:
★ $\sim (\forall x : p) = \exists! x :\sim p$ ★ $\sim (\exists! x : p) = \forall x :\sim p$

3.

Qual é a negação da proposição $\sim p \wedge q$?

A. $\sim p \vee q$ B. $p \vee \sim q$ C. $p \wedge \sim q$ D. $\sim p \wedge \sim q$

2010. Extraordinário

【Resolução】

$\sim (\sim p \wedge q) = \sim (\sim p) \wedge \sim q = p \vee \sim q$

Opção: B

Primeiras leis de De Morgan:
Sejam p e q duas proposições quaisquer. Então tem-se:
★ $\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$; ★ $\sim (p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$

4.

Qual é o domínio de existência da expressão $\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-9}}$?

A. $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ B. $\mathbb{R} \setminus]-3;3[$ C. $\mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$ D. $\mathbb{R} \setminus [-3;3]$

2010. Extraordinário

【Resolução】

Tem-se as seguintes duas condições:

Como o denominador é diferente de zero, tem-se a condição:

$\sqrt{x^2-9} \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 \neq 0 \cdots ①$.

Como o índice 2 é par, o radicando é maior ou igual a zero. Por isso, tem-se a condição: $x^2 - 9 \geq 0 \cdots ②$

Por ① e ②, tem-se: $x^2 - 9 > 0$.

Resolvendo a inequação $x^2 - 9 > 0$, tem-se:

$$x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) > 0$$
$$\Leftrightarrow x < -3 \vee 3 < x \Leftrightarrow \mathbb{R} \setminus [-3; 3]$$

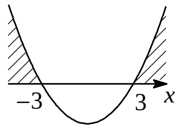
Opção: D

$\longleftarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow$ Condição: $g(x) \neq 0$

$\longleftarrow$ Expressão algébrica irracional $\sqrt[n]{x}$:
- se o índice n é par, então $x \geq 0$.
- se o índice n é ímpar, então $x \in \mathbb{R}$.

$\longleftarrow x^2 - 9 \neq 0 \wedge x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 > 0$

$\longleftarrow$



5.

A expressão $\dfrac{3x}{x^2-1} + \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{x+3}{x-1}$ com $x \neq \pm 1$ é equivalente a...

A. $-\dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}$ B. $-\dfrac{x^2-x-1}{x^2-1}$ C. $-\dfrac{x^2-x+1}{x^2-1}$ D. $-\dfrac{x^2+x-1}{x^2-1}$

2010. Extraordinário

【Resolução】

$$\frac{3x}{x^2-1} + \frac{2}{x-1} - \frac{x+3}{x-1} = \frac{3x}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{x-1} - \frac{x+3}{x-1}$$
$$= \frac{3x + 2(x+1) - (x+3)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{3x + 2x + 2 - (x^2 + 4x + 3)}{(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{-x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = -\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 1}$$

Opção: C

$\longleftarrow$ Factoriza-se $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ aplicando $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$\longleftarrow m.m.c\ [(x-1)(x+1), x-1] = (x-1)(x+1)$

$\longleftarrow -x^2 + x - 1 = -(x^2 - x + 1)$

6.

Se $(a; b; c)$ é solução do sistema $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + z = 4 \\ x + 2y + z = -2 \end{cases}$, qual será o valor de $a + b + c$?

A. -1 B. $-\dfrac{2}{3}$ C. $\dfrac{2}{3}$ D. 1

2010. Extraordinário

【Resolução】

Seja $\begin{cases} x + y - z = 2 \cdots ① \\ 2x - y + z = 4 \cdots ② \\ x + 2y + z = -2 \cdots ③ \end{cases}$.

Calculando ① + ②, tem-se: $3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$

Calculando ① + ③, tem-se: $2x + 3y = 0 \cdots ④$

Em seguida, substituindo x por 2 na equação ④, tem-se:

$$2 \cdot 2 + 3y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}$$

Por fim, substituindo x por 2 e y por $-\dfrac{4}{3}$ na equação ②, tem-se:

$$4 - (-\frac{4}{3}) + z = 4 \Leftrightarrow z = -\frac{4}{3}$$

Logo, $(a; b; c) = (2; -\dfrac{4}{3}; -\dfrac{4}{3})$.

Por isso, $a + b + c = 2 + (-\dfrac{4}{3}) + (-\dfrac{4}{3}) = -\dfrac{2}{3}$.

Opção: B

$$\longleftarrow \begin{array}{rrrrrrrl} & x & + & y & - & z & = & 2 \\ +) & 2x & - & y & + & z & = & 4 \\ \hline & 3x & & & & & = & 6 \end{array}$$

$$\longleftarrow \begin{array}{rrrrrrrl} & x & + & y & - & z & = & 2 \\ +) & x & + & 2y & + & z & = & -2 \\ \hline & 2x & + & 3y & & & = & 0 \end{array}$$

$\longleftarrow \dfrac{2 \cdot 3 - 4 - 4}{3} = \dfrac{-2}{3}$

7.

Qual é a solução da equação $\log_2 x + \log_4 x = 1$?

A. $x = 3\sqrt[3]{2}$ B. $x = \sqrt{2^3}$ C. $x = \sqrt[3]{2}$ D. $x = \sqrt[3]{4}$

★★2010. Extraordinário

【**Resolução**】

Como o logritmando é positivo, tem-se a condição: $x > 0$

Pela fórmula da mudança de base, tem-se:

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$$

Então, a equação transforma-se em:

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{2\log_2 x + \log_2 x}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\log_2 x}{2} = 1 \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 2^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2^2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4}$$

Opção: D

⟵ $\log_a x \Rightarrow$ Condição: $x > 0$

⟵ Fórmula da mudança de base:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

⟵ Ao resolver as equações logarítmicas com bases diferentes, cria-se a condição de obter a mesma base.

⟵ Adopta-se $\log_2$ no segundo membro da equação.

⟵ $\frac{2}{3} = \log_2 2^{\frac{2}{3}}$ aplicando $\log_a a^p = p$

⟵ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

8.

Qual é a solução da equação $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$?

A. ± 1 B. ± 2 C. ± 3 D. ± 4

2010. Extraordinário

【**Resolução**】

Fazendo $x^2 = t$, se $t \geq 0$, a equação fica: $t^2 - 2t + 1 = 0$

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{t} = 1$$

Como $t = x^2$, então tem-se: $\boldsymbol{x^2} = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Opção: A

⟵ Equação biquadrada: $(\boldsymbol{x^2})^2 - 2\boldsymbol{x^2} + 1 = 0$

⟵ Factoriza-se t^2-2t+1 aplicando $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$. $t = 1$ satisfaz a condição $t \geq 0$.

9.

Qual é o número designado pela expressão $\dfrac{\cos 570° + \text{sen}30°}{\text{tg}45°}$?

A. $-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ B. $-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ C. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ D. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

2010. Extraordinário

【**Resolução**】

Calcula-se $\cos 570°$, sen30° e tg45°:

$$\cos 570° = \cos(360° + 210°) = \cos 210°$$

$$= \cos(180° + 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen}30° = \frac{1}{2}; \qquad \text{tg}45° = 1$$

Logo, a expressão fica:

$$\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}}{1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Opção: B

⟵ $\text{sen}(360° + \alpha) = \text{sen}\alpha$; $\boldsymbol{\cos(360° + \alpha) = \cos\alpha}$; $\text{tg}(360° + \alpha) = \text{tg}\alpha$; $\text{cotg}(360° + \alpha) = \text{cotg}\alpha$

⟵ $\text{sen}(180° + \alpha) = -\text{sen}\alpha$; $\boldsymbol{\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha}$; $\text{tg}(180° + \alpha) = \text{tg}\alpha$; $\text{cotg}(180° + \alpha) = \text{cotg}\alpha$

10.

A que é igual a soma das soluções da equação $|2x - 1| = |x + 2|$?

A. $\dfrac{8}{3}$ B. $\dfrac{4}{3}$ C. $\dfrac{2}{3}$ D. $\dfrac{1}{3}$

2010. Extraordinário

【Resolução】

$|2x-1| = |x+2| \Leftrightarrow 2x-1 = \pm(x+2)$
$\Leftrightarrow 2x-1 = x+2 \ \vee \ 2x-1 = -x-2$
$\Leftrightarrow x = 3 \ \vee \ 3x = -1$
$\Leftrightarrow x = 3 \ \vee \ x = -\frac{1}{3}$

⟵ **Equação modular do tipo $|f(x)| = |g(x)|$:**
★$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = \pm g(x)$

Por isso, a soma das soluções da equação é: $3 + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}$

⟵ $\frac{9}{3} - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

Opção: A

11.
Seja $f(x) = 2\text{sen}x$ uma função de domínio $\mathbb{R}$. Qual é contradomínio da função $y = |f(x)|$?

A. $[-2; 2]$ B. $]-2; 2[$ C. $[0; 2]$ D. $]0; 2[$

2010. Extraordinário

【Resolução】

Como $-1 \leq \text{sen}x \leq 1$, então $0 \leq |\text{sen}x| \leq 1$.
Multiplicando por 2 todos os membros da inequação, tem-se:

$$0 \leq 2|\text{sen}x| \leq 2 = 2 \Leftrightarrow 0 \leq |2\text{sen}x| \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 2$$

Por isso, o contra domínio de $f(x)$ é $[0; 2]$

⟵ **Contradomínio de funções trrigonométricas**:
★ $-1 \leq \text{sen} f(x) \leq 1$; ★ $-1 \leq \cos f(x) \leq 1$;
★ $-\infty \leq \text{tg} f(x) \leq +\infty$
⟵ $2|\text{sen}x| = |2| \cdot |\text{sen}x| = |2\text{sen}x|$

Opção: C

12.
Sendo $\frac{n!}{(n-2)!} = 30$, qual é o valor de n?

A. 2 B. 4 C. 5 D. 6

2010. Extraordinário

【Resolução】

Antes da resolução apresenta-se a condição:

$n \geq 0 \ \wedge \ n-2 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 0 \ \wedge \ n \geq 2 \Leftrightarrow n \geq 2$

⟵ $n! \Rightarrow$ Condição: $n \geq 0$

$\frac{n!}{(n-2)!} = 30 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 30 \Leftrightarrow n(n-1) = 30$
$\Leftrightarrow n^2 - n - 30 = 0 \Leftrightarrow (n-6)(n+5) = 0$
$\Leftrightarrow n = 6 \vee n = -5$

⟵ $n! = n(n-1)\underbrace{(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}_{(n-2)!} = n(n-1)(n-2)!$

Como $n \geq 0$, tem-se $n = 6$.

⟵ Como $n = -5 < 2$, não satisfaz a condição $n \geq 2$.

Opção: D

13.
De quantas maneiras diferentes pode-se escolher o chefe da turma e seu adjunto, numa turma de 10 alunos?

A. 5 B. 20 C. 45 D. 90

2010. Extraordinário

【Resolução】

Deseja-se o número total das maneiras diferentes de escolher 2 alunos dentre 10 alunos e em seguida permutar os 2 alunos entre si pela ordem do chefe e seu adjunto.
Como interessa ordem, trata-se do arranjo de 10 elementos tomados 2 a 2, isto é:
Portanto, tem-se:

$$A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$$

⟵ O arranjo de n elementos tomados, p a p é o produto de p números naturais consectivos, por ordem decrescente, a partir de n e representa-se por A_n^p, isto é:

$$A_n^p = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ termos}}$$

A_n^p é igual ao número total das maneiras diferentes de escolher p elementos dentre n elementos e perumutar os p elementos entre si. Quando interessa a ordem, trata-se de um arranjo A_n^p.

Opção: D

14.

De quantas maneiras diferentes pode-se formar uma comissão de 3 professores dentre os 7 de uma turma?

A. 6 B. 35 C. 210 D. 5040

2010. Extraordinário

【**Resolução**】

Deseja-se o número total das maneiras diferentes de escolher 3 professores dentre os 7 professores.

Como não interessa a ordem, trata-se da combinação de 7 elementos tomados 3 a 3, isto é:

Portanto, tem-se: $C_7^3 = \frac{A_7^3}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$

Opção: B

⟵ A combinação de n, p a p é o quociente de A_n^p por $p!$ e representa-se por C_n^p, isto é:

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}^{p \text{ factores}}}{p(p-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

C_n^p é igual ao número total das maneiras diferentes de escolher p elementos dentre n elementos. Quando não interessa a ordem, trata-se de uma combinação C_n^p.

15.

Um casal planeja ter dois filhos. Considerando igual a probabilidade de se ter um filho do sexo masculino ou feminino, qual é a probabilidade de ambos serem do sexo feminino?

A. 25% B. 50% C. 75% D. 80%

2010. Extraordinário

【**Resolução**】

Designa-se por M-masculino e F-feminino.

O número de casos possíveis é $2^2 = 4$, que são os seguintes:

$\{M; M\}$, $\{M; F\}$, $\{F; M\}$ e $\{F; F\}$

E o número de casos favoráveis é 1, que é o seguinte: $\{F; F\}$

Por isso, a probabilidade é: $\frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$

Opção: A

⟵ Há duas possibilidades:
ter um filho do sexo masculino ou feminino

⟵ A probabilidade de um acontecimento A é dada por:

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\textbf{número de casos favoráveis}}{\textbf{número de casos possíveis}}$$

16.

A sucessão $(3m; m+1; 5)$ é uma progressão aritmética. Qual é o valor da diferença entre os seus termos?

A. −7 B. −3 C. 3 D. 7

2010. Extraordinário

【**Resolução**】

Calcula-se o valor de m.

Como a sucessão é uma PA, então a diferença entre dois termos consecutivos deve ser constante. Logo tem-se:

$$(m+1) - 3m = 5 - (m+1) \Leftrightarrow -2m + 1 = 4 - m \Leftrightarrow m = -3$$

Por isso, a sucessão fica:

$$(3(-3); -3+1; 5) = (-9; -2; 5).$$

Logo, a diferença é: $5 - (-2) = 7$

Opção: D

⟵ Uma PA é uma sucessão em que a diferença entre dois termos consectivos é constante.

⟵ A diferença entre os termos $3m$ e $m+1$ é: $(m+1) - 3m$
A diferença entre os termos $m+1$ e 5 é: $5 - (m+1)$

⟵ Substitui-se m por -3 em $(3m; m+1; 5)$.

⟵ Também pode se calcular a diferença como $-2 - (-9) = 7$.

17.

Em uma progressão geométrica, $a_8 = 128$ e $q = 2$, qual é o valor da soma dos dez primeiros termos?

A. 2000 B. 1533 C. 1023 D. 1000

2010. Extraordinário

【**Resolução**】

Como $a_8 = 128$ e $q = 2$, então tem-se:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow a_1 \cdot 2^7 = 128 \Leftrightarrow a_1 = \frac{128}{128} \Leftrightarrow a_1 = 1$$

Portanto, a soma dos dez primeiros termos é:

$$S_{10} = \frac{1(1-2^{10})}{1-2} = \frac{1-1024}{-1} = 1023$$

Opção: C

⟵ O termo geral de PG é dado por $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.
O termo geral de PA é dado por $a_n = a_1 + (n-1)d$.

⟵ A soma dos n primeiros termos de uma PG é dada por $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

18.

Na sucessão $a_n = a_{n-1} + 5$ com $n \in \mathbb{N}$, se $a_3 = 17$, qual será o termo de ordem 5?

A. 27 B. 24 C. 21 D. 18

2010. Extraordinário

【Resolução】

Pela condição $a_n = a_{n-1} + 5$ com $n \in \mathbb{N}$, nota-se que a_n é uma PA cuja diferença d é 5.

Como $a_3 = 17$, então tem-se: $a_1 + (3-1) \cdot 5 = 17 \Leftrightarrow a_1 = 7$

Logo, o termo geral é: $a_n = 7 + (n-1) \cdot 5 = 5n + 2$.

Portanto, o termo de ordem 5 é: $a_5 = 5 \cdot 5 + 2 = 27$

Opção: A

⟵ a_n é uma PA cujo diferença é d $\Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + d; \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n = d; \forall n \in \mathbb{N}$

⟵ O termo geral de uma PA é $a_n = a_1 + (n-1)d$.

⟵ Substitui-se n por 5 em $a_n = 5n + 2$.

【Outra resolução】

Sustituindo $n = 4$ em $a_n = a_{n-1} + 5$, tem-se:

$$a_4 = a_3 + 5 = 17 + 5 = 22$$

De mesmo modo, substituindo $n = 5$ em $a_n = a_{n-1} + 5$, tem-se:

$$a_5 = a_4 + 5 = 22 + 5 = 27$$

⟵ $a_3 = 17$

⟵ $a_4 = 22$

19.

Quantos termos tem a sucessão $-14; -10; -6; \ldots; 42$?

A. 4 B. 15 C. 30 D. 40

2010. Extraordinário

【Resolução】

A sucessão é uma PA porque a diferença entre dois termos consecutivos é constante 4.

Como $a_1 = -14$ e $d = 4$, o termo geral é:

$$a_n = -14 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 18$$

Para se obter o número dos termos, resolve-se a equação:

$$a_n = 42 \Leftrightarrow 4n - 18 = 42 \Leftrightarrow 4n = 60 \Leftrightarrow n = 15$$

Portanto, a sucessão tem 15 termos.

Opção: B

⟵ $-14, \quad -10, \quad -6, \quad \ldots$ ($+4$, $+4$, $+4$)

⟵ O termo geral de uma PA é $a_n = a_1 + (n-1)d$.

⟵ a_n significa o termo da ordem n.

20.

Qual é o valor de $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+1}{n^2+1}$?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2010. Extraordinário

【Resolução】

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2+1}{n^2}}{\frac{n^2+1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{1} = 2$$

Opção: B

⟵ Para levantar uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, divide-se o numerador e o denominador pela potência máxima do denominador.

【Outra resolução】

Como o numerador e o denominador têm mesmo grau, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{2}n^2+1}{n^2+1} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}}$$

⟵ Se o numerador e o denominador têm o mesmo grau, o limite quando $n \to \infty$ é o quociente dos coeficientes dos termos de maior grau.

21.

Qual é a classificação da função $f(x) = \text{sen}2x$ quanto à paridade?

A. Ímpar B. Ímpar e par C. Não é par nem ímpar D. Par

2010. Extraordinário

【Resolução】

Calcula-se $f(-x)$: $f(-x) = \text{sen}(-2x) = -\text{sen}2x = -f(x)$

Como $f(-x) = -f(x)$, $f(x)$ é ímpar.

Opção: A

⟵ $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\alpha$

⟵ Se $f(-x) = f(x)$, então $f(x)$ é par.
Se $f(-x) = -f(x)$, então $f(x)$ é ímpar.

22.

Na função $f(x) = 2^x$, a que é igual $f(a+1) - f(a)$?

A. 1　　B. 2　　C. $f(a)$　　D. $f(1)$

2010. Extraordinário

【**Resolução**】

Primeiro, calcula-se $f(a+1)$ e $f(a)$:

$f(a+1) = 2^{a+1}$ e $f(a) = 2^a$ ⟵ Para se obter $f(a+1)$ e $f(a)$, substitui-se x por $a+1$ e a em $f(x) = 2^x$ respectivamente.

Por fim, tem-se:

$f(a+1) - f(a) = 2^{a+1} - 2^a = 2 \cdot \mathbf{2^a} - \mathbf{2^a} = \mathbf{2^a}(2-1) = 2^a = f(a)$ ⟵ $2^{a+1} = 2^a \cdot 2^1 = 2^a \cdot 2$ aplicando $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

Opção: C

23.

Uma função f é tal que $f(0) = 1$. Qual das seguintes expressões pode definir a função f?

A. $\frac{x+2}{x+1}$　　B. $\frac{x}{x+1}$　　C. $3x + \frac{3}{2}$　　D. $2^{\operatorname{sen}x}$

2010. Extraordinário

【**Resolução**】

Calcula-se $f(0)$ na função de cada opção. ⟵ $f(0)$ obtém-se através da substituição de x por 0.

A. $f(0) = \frac{0+2}{0+1} = 2$

B. $f(0) = \frac{0}{0+1} = 0$

C. $f(0) = 3 \cdot 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

D. $f(0) = 2^{\operatorname{sen}0} = 2^0 = 1$ ⟵ $\operatorname{sen}0 = 0$

Portanto, a solução é a opção D.

Opção: D

24.

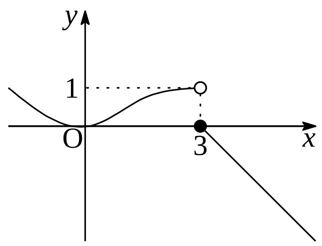
Dado o gráfico de uma função $y = f(x)$. Então...

A. $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = 1$ e $f(3) = 1$

B. $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = 1$ e $f(3) = 0$

C. $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = 1$ e $f(3) = 0$

D. $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = 0$ e $f(3) = 0$



2010. Extraordinário

【**Resolução**】

Pela leitura do gráfico, nota-se que quando x se aproxima de 3 pela esquerda, o valor de y se aproxima de 1 e quando x se aproxima de 3 pela direita, o valor de y se aproxima de 0. ⟵ O limite lateral à esquerda de 3 é 1 e o limite lateral à direita de 3 é 0.

Então, simbolicamente escreve-se:

$\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = 0$

Como o ponto $(3; 0)$ é pintado, então $f(3) = 0$. ⟵ Como o gráfico passa por $(3; 0)$, tem-se: $f(3) = 0$

Portanto, a opção C é correcta.

Opção: C

25.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to7} \frac{x-7}{x^2-49}$?

A. $\frac{1}{14}$　　B. 1　　C. 14　　D. ∞

2010. Extraordinário

【Resolução】

$$\lim_{x\to7}\frac{x-7}{x^2-49}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to7}\frac{\cancel{x-7}}{(\cancel{x-7})(x+7)}=\lim_{x\to7}\frac{1}{x+7}=\frac{1}{14}$$

⟵ Factoriza-se x^2-49 aplicando $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Opção: A

26.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x+3}{3x^3+1}$?

A. 0 B. $\frac{1}{3}$ C. 3 D. ∞

2010. Extraordinário

【Resolução】

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x+3}{3x^3+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4-x+3}{x^3}}{\frac{3x^3+1}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{3+\frac{1}{x^3}}=\infty$$

⟵ Para levantar a indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, divide-se o numerador e o denominador pela potência máxima do denominador.

⟵ $\frac{\infty-0+0}{3+0}=\frac{\infty}{3}=\infty$

Opção: D

27.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{sen}^2x}{x}$?

A. 0 B. 1 C. 2 D. ∞

2010. Extraordinário

【Resolução】

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{sen}^2x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{sen}x}{x}\cdot\mathrm{sen}x=1\cdot0=0$$

⟵ **Limite notável**: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{sen}x}{x}=1$; $\mathrm{sen}0=0$

Opção: A

28.

Para que a função $f(x)=\begin{cases}2x-3, & \text{se } x\le0\\ k-4, & \text{se } x>0\end{cases}$ seja contínua no ponto $x=0$, qual deve ser o valor de k?

A. -3 B. $-\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

2010. Extraordinário

【Resolução】

Para que a função seja contínua em $x=0$, é necessário que:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)$$

⟵ $f(x)$ é contínua no ponto de abcissa $x=a$ $\iff \exists\lim\limits_{x\to a}f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ $\iff \lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$

O limite lateral à esquerda de $f(x)$ de $x=0$ é:

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(2x-3)=2\cdot0-3=\mathbf{-3}$$

⟵ Quando $x\to0^-$, isto é, $x<0$, $f(x)=2x-3$.

O limite lateral à direita de $f(x)$ de $x=0$ é:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(k-4)=\boldsymbol{k-4}$$

⟵ Quando $x\to0^+$, isto é, $x>0$, $f(x)=k-4$.

O valor de $f(x)$ no ponto $x=0$ é: $f(0)=2\cdot0-3=\mathbf{-3}$

⟵ Quando $x=0$, $f(x)=2x-3$.

Como estes são iguais, tem-se: $\boldsymbol{k-4=-3}\Leftrightarrow k=1$

Opção: D

29.

Qual é a primeira derivada da função $f(x)=\lg x^2$?

A. $f'(x)=\dfrac{2}{x\ln x}$ B. $f'(x)=\dfrac{2}{x\ln10}$ C. $f'(x)=\dfrac{2}{x^2\ln e}$ D. $f'(x)=\dfrac{2}{x^2\ln10}$

2010. Extraordinário

【Resolução】

Como $f(x) = \mathbf{lg}x^2 = \mathbf{log_{10}}x^2$, tem-se:

$$f'(x) = (\log_{10} x^2)' = \frac{(x^2)'}{x^2 \ln 10} = \frac{2x}{x^2 \ln 10} = \frac{2}{x \ln 10}$$

Opção: B

【Outra resolução】

Como $f(x) = \lg x^2 = \log_{10} x^{\mathbf{2}} = \mathbf{2} \log_{10} x$, tem-se:

$$f'(x) = (2 \log_{10} x)' = 2 \cdot \frac{1}{x \ln 10} = \frac{2}{x \ln 10}$$

⟵ $\mathbf{lg}x = \mathbf{log_{10}}x$

⟵ **Derivada de uma função composta**: $[\log_a f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{f(x) \ln a}$ porque $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

⟵ $\log_a M^{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k} \log_a M$

⟵ $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

30.

Sendo $f(x) = \text{sen}2x$, qual é o valor da segunda derivada no ponto de abcissa $x = \dfrac{\pi}{4}$?

A. -4 B. -1 C. 0 D. 1

2010. Extraordinário

【Resolução】

A primeira derivada é:

$$f'(x) = (\text{sen}2x)' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2 \cos 2x$$

Então, a segunda derivada é:

$$f''(x) = (2 \cos 2x)' = 2(-\text{sen}2x) \cdot (2x)' = -4\text{sen}2x$$

Portanto, o valor da segunda derivada em $x = \dfrac{\pi}{4}$ é:

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\text{sen}2 \cdot \frac{\pi}{4} = -4\text{sen}\frac{\pi}{2} = -4$$

Opção: A

⟵ **Derivada de uma função composta**: $[\text{sen} f(x)]' = \cos f(x) \cdot f'(x)$ porque $(\text{sen}x)' = \cos x$

⟵ **Derivada de uma função composta**: $[\cos f(x)]' = -\text{sen} f(x) \cdot f'(x)$ porque $(\text{sen}x)' = \cos x$.

★A segunda derivada de $f(x)$ é a derivada da primeira derivada de $f(x)$.

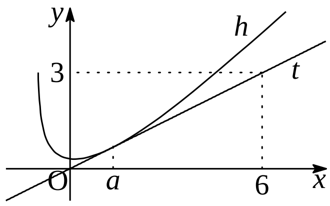
⟵ $\mathbf{sen}\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}} \mathbf{= 1}$; $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$; $\nexists \text{tg}\dfrac{\pi}{2}$; $\text{cotg}\dfrac{\pi}{2} = 0$

31.

Na figura seguinte está a representação gráfica da função h e de uma recta t, tangente ao gráfico no ponto de abcissa $x = a$. Qual é o valor de $h'(a)$?

A. $-\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{1}{6}$

C. $\dfrac{1}{3}$ D. $\dfrac{1}{2}$



2010. Extraordinário

【Resolução】

Seja m o declive da recta t. Então tem-se: $h'(a) = m$

Calcula-se o valor de m.

Pela leitura do gráfico, o gráfico passa pela origem e pelo ponto $(6; 3)$.

Então, o declive da recta t é: $m = \dfrac{3-0}{6-0} = \dfrac{1}{2}$

Portanto, tem-se: $h'(a) = m = \dfrac{1}{2}$

Opção: D

⟵ O declive da recta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ em $x = a$ é igual a $f'(a)$.

⟵ O declive de uma recta que passa pelos pontos $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ é $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

32.

Quais são os extremos da função $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 4}{x - 2}$?

A. máximo $(0; 2)$ e mínimo $(10; 4)$ B. máximo $(2; 0)$ e mínimo $(10; 4)$

C. máximo $(0; 2)$ e mínimo $(4; 10)$ D. máximo $(4; 10)$ e mínimo $(0; 2)$

2010. Extraordinário

【**Resolução**】

Antes da resolução, apresenta-se a condição:

$x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

Calcula-se $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+2x-4}{x-2}\right)' = \frac{(x^2+2x-4)'(x-2)-(x^2+2x-4)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{(2x+2)(x-2)-(x^2+2x-4)}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-4x+2x-4-x^2-2x+4}{(x-1)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-1)^2}$$

Calcula-se os zeros da função derivada:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$$

Constroi-se a tabela de monotonia e extremos:

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	Máx; 2	$\searrow$		$\searrow$	Mín; 10	$\nearrow$

Pela tabela, conclui-se que o extrémo máximo é $(0; 2)$ e o extrémo mínimo é $(4; 10)$.

Opção: C

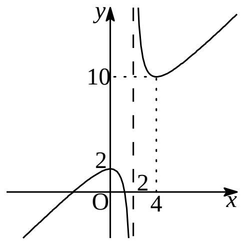
⟵ O denominador é diferente de 0.

⟵ **Derivada do quociente de duas funções:**

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

⟵ $(x^2+2x-4)' = 2x+2;\quad (x-2)' = 1$

O gráfico da função $f(x)$ representa-se:



⟵ Há posibilidade de ter extremos para $x = 0$ e $x = 4$.

⟵ ★ Se $\boldsymbol{f'(a) = 0}$ e $f'(x)$ passa em $x = a$ de **negativa a positiva**, a função $f(x)$ tem para $x = a$ um extremo **mínimo**. ★ Se $\boldsymbol{f'(a) = 0}$ e $f'(x)$ passa em $x = a$ de **positiva a negativa**, a função $f(x)$ tem para $x = a$ um extremo **máximo**.

⟵ $f(0) = \dfrac{0+0-4}{0-2} = 2;\quad f(4) = \dfrac{16+8-4}{4-2} = 10$

33.

Quais são as equações das assímptotas do gráfico da função $h(x) = -\dfrac{1}{2x+1}$?

A. $x = -\dfrac{1}{2}$ e $y = 0$ B. $x = \dfrac{1}{2}$ e $y = 0$ C. $x = -\dfrac{1}{2}$ e $y = -1$ D. $x = 0$ e $y = -\dfrac{1}{2}$

2010. Extraordinário

【**Resolução**】

A função é homográfica e fica assim:

$$h(x) = -\frac{1}{2x+1} = \frac{-1}{2x+1} = \frac{0\cdot x - 1}{2x+1}$$

Então, conclui-se que:

AV é $x = -\dfrac{1}{2}$ e AH é $y = \dfrac{0}{2} = 0$

Opção: A

Uma função do tipo $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ é homográfica cujas assímptotas vertical e horizontal são dadas pelas seguintes equações:

★AV : $x = -\dfrac{d}{c}$ (⟵ Zero do denominador)

★AH : $y = \dfrac{a}{c}$ (⟵ Quociente dos coeficientes de x)

34.

Quais são os intervalos de monotonia do gráfico da função $g(x) = x^3 - 6x^2$?

A. $g(x) \nearrow \forall x \in]-\infty; 0[\cup]4; +\infty[$ e $g(x) \searrow \forall x \in]0; 4[$

B. $g(x) \searrow \forall x \in]-\infty; 0[\cup]4; +\infty[$ e $g(x) \nearrow \forall x \in]0; 4[$

C. $g(x) \nearrow \forall x \in]-\infty; -4[\cup]0; +\infty[$ e $g(x) \searrow \forall x \in]-4; 0[$

D. $g(x) \nearrow \forall x \in]-\infty; 4[$ e $g(x) \searrow \forall x \in]4; +\infty[$

2010. Extraordinário

【**Resolução**】

$g'(x) = 3x^2 - 6 \cdot 2x = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$

Calcula-se os zeros da função derivada:

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$

Constroi-se a tavela de monotonia e extremos:

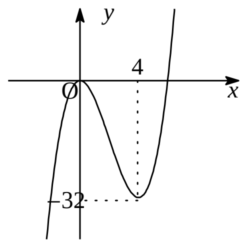
x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	Máx	↘	Mín	↗

Pela leitura da tabela, conclui-se que:

$g(x) \nearrow \forall x \in]-\infty; 0[\cup]4; +\infty[$ e $g(x) \searrow \forall x \in]0; 4[$

Opção: A

O gráfico de $g(x) = x^3 - 6x^2$ representa-se:



⟵★Se $f'(x) > 0$ num intervalo, então $f(x)$ é crescente nesse intervalo.
★Se $f'(x) < 0$ num intervalo, então $f(x)$ é decrescente nesse intervalo.

35.

A soma de dois números reais é 5. Quais serão os números se o produto deles é máximo?

A. $\frac{1}{2}$ e $\frac{9}{2}$ B. $\frac{5}{2}$ e $\frac{5}{2}$ C. 3 e 2 D. 4 e 1

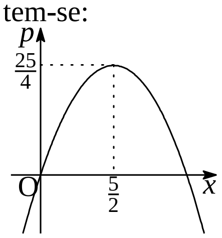
2010. Extraordinário

【**Resolução**】

Seja x um de dois números reais cuja soma é 5. Então o outro nú mero é $5 - x$.

Se p é o produto dos dois números, então tem-se:

$$\begin{aligned} p = x(5-x) &= -x^2 + 5x \\ &= -(x^2 - 5x) \\ &= -\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right] \\ &= -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \end{aligned}$$



Logo, as coordenadas do vértice do gráfico da função são $\left(\frac{5}{2}; \frac{25}{4}\right)$ e o gráfico se representa como a figura em cima.

Pela leitura da figura, quando $x = \frac{5}{2}$, p é máximo $\frac{25}{4}$.

Então os números pedidos são $\frac{5}{2}$ e $5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$.

Opção: B

⟵ Sejam x e y dois números reais cuja soma é 5. Como $x + y = 5$, então$y = 5 - x$

⟵ **Outro caminho para se obter o vértice da função $p = x(5-x)$:**
Os zeros da função $p = x(5-x)$ são $x = 0$ e $x = 5$.
Como a abcissa do vértice é o ponto médio dos dois zeros, então a abcissa do véritice é: $\frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}$.
Substituindo x por $\frac{5}{2}$ em $p = x(5-x)$, obtém-se a ordenada do vértice: $p = \frac{5}{2}\left(5 - \frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4}$
Por isso, as coordenadas do vértice são $\left(\frac{5}{2}; \frac{25}{4}\right)$.

⟵ O gráfico de uma função quadrática, $y = a(x-\boldsymbol{p})^2 + \boldsymbol{q}$, é uma parábola e tem o vértice $(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{q})$. Se $a > 0$ a parábola tem a concavidade virada para cima e se $a < 0$, a parábola tem a concavidade virada para baixo.

⟵ $5 - x = 5 - \frac{5}{2} = \frac{10-5}{2} = \frac{5}{2}$

【**Outra resolução**】

De igual modo, pode-se ter $p = -x^2 + 5x$.

Calculando a primeira derivada, tem-se $p' = -2x + 5$.

Resolvendo $p' = 0$, tem-se: $-2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

Logo, a tabela de monotonia e extremos é dada por:

x	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$
p'	+	0	−
p	↗	Máx	↘

Pela leitura da tabela, p tem um extremo máximo para $x = \frac{5}{2}$.

Neste caso, como o extremo máximo coicide com o máximo absoluto. Quando $x = \frac{5}{2}$, p é máximo.

Então os números pedidos são $\frac{5}{2}$ e $5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$.

⟵ $(-x^2)' = -2x$; $(5x)' = 5$

⟵ ★ Se $\boldsymbol{f'(a) = 0}$ e $f'(x)$ passa em $x = a$ de **negativa a positiva**, $f(x)$ tem para $x = a$ um extremo **mínimo**.
★ Se $\boldsymbol{f'(a) = 0}$ e $f'(x)$ passa em $x = a$ de **positiva a negativa**, $f(x)$ tem para $x = a$ um extremo **máximo**.

Somente para a Secção de Letras

36.

No universo $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, qual é o complementar do conjunto $N = \{4; 5\}$?

A. $\{1; 2; 3; 6; 7; 8; 9; 10\}$ B. $\{1; 2; 3\}$ C. $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ D. $\{1; 2; 3; 6\}$

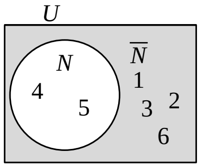
2010. Extraordinário

【**Resolução**】

O complementar do conjunto N é:

$\overline{N} = U \setminus N = \{1; 2; 3; 6\}$

Opção: D



37.

Dados os conjuntos $M = \{x \in \mathbb{R} : -3 \le x < 4\}$ e $N = \{x \in \mathbb{R} : 2 \le x \le 6\}$. Quais são os valores inteiros de x que pertencem ao conjunto $M \cap N$?

A. $[2; 4[$ B. $[2; 3]$ C. $\{2; 3\}$ D. $\{2; 3; 4\}$

2010. Extraordinário

【**Resolução**】

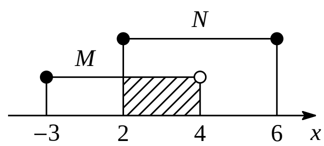
A intersecção de M com N é:

$M \cap N = \{x \in \mathbb{R} : -2 \le x < 4\} = [2; 4[$

Então, os números inteiros que pertencem a este intervalo são 2 e 3.

Opção: B

$\longleftarrow$



38.

Num teste de Matemática saíram apenas duas questões e:

- 100 alunos acertaram as duas questões;
- 170 alunos acertaram a 1ª questão;
- 100 alunos acertaram apenas uma questão;
- 95 alunos erraram as duas questões.

Quantos alunos fizeram a prova?

A. 465 B. 295 C. 270 D. 265

2010. Extraordinário

【**Resolução**】

Sejam:

U- Conjunto de todos os alunos que fizeram a prova;

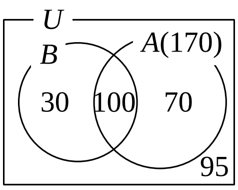
A - Conjunto dos alunos que acertaram a 1ª questão;

B - Conjunto dos alunos que acertaram a 2ª questão;

Pode-se construir o diagrama de Venn como a figura mostra.

Pela leitura do diagrama, os alunos que fizeram a prova são:

$30 + 100 + 70 + 95 = 295$



Opção: B

$\longleftarrow$ Nota-se que:
$n(A \cap B) = 100$, $n(A) = 170$, $n(A \cup B) - n(A \cap B) = 100$ e $n(\overline{A \cup B}) = 95$.

$\longleftarrow$ Os alunos que acertaram apenas 1ª questão são $170 - 100 = 70$.
Como os alunos que acertaram apenas uma questão são 100, os alunos que acertaram apenas 2ª questão são $100 - 70 = 30$.

39.

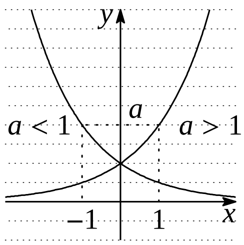
Qual das expressões define uma função injectiva de domínio $\mathbb{R}$?

A. $y = x^2$ B. $y = \cos x$ C. $y = \operatorname{sen} x$ D. $y = a^x$

2010. Extraordinário

【Resolução】

O gráfico da função $y = a^x$ da opção D representa-se como a figura mostra. Se $a > 1$, então a função $y = a^x$ é cresente e se $0 < a < 1$, então é decrescente.



A partir da figura, nota-se que a função $y = a^x$ é injectiva porque nenhuma recta horizontal corta o gráfico da função em mais um ponto. As funções das outras opções A, B e C não são injectivas porque algumas rectas horizontais cortam o gráfico da função em mais um ponto.

Opção: D

⟵ ⋆Se nenhuma recta horizontal corta o gráfico de f em mais um ponto, então f é injectiva.

⋆Se toda recta horizontal corta o gráfico de f, então f é sobrejectiva.

⋆Se toda recta corta o gráfico de f em um sóponto, então f é bijectiva.
(Se uma função f é simultaneamente injectiva e sobrejectiva, f é bijectiva.)

40.

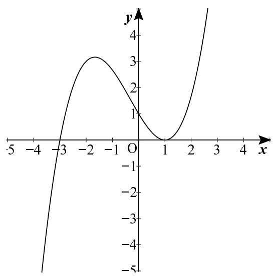
Seja uma função polinomial do terceiro grau, cujo gráfico se encontra representado na figura. Quantas são as soluções da equação $f(x) = 0$?

A. Duas

B. Três

C. Quatro

D. Uma



2010. Extraordinário

【Resolução】

Pela leitura da figura, nota-se que o gráfico da função intersecta o eixo das abcissas em dois pontos.
Logo, a equação $f(x) = 0$ tem duas soluções.

Opção: A

⟵ A solução da equação $f(x) = 0$ é: $x = -3 \vee x = 1$

Somente para a Secção de Ciências

36.

Qual é a distância entre os pontos $(1; 1)$ e $(4; 2)$?

A. 3 B. $\sqrt{10}$ C. 4 D. 10

2010. Extraordinário

【Resolução】

A distância entre os pontos $(1; 1)$ e $(4; 2)$ é:

$$d = \sqrt{(4-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}$$

Opção: B

⟵ A distância entre dois pontos $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ é dada por: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

37.

Qual é a equação da recta que passa pelos pontos $(1; 1)$ e $(4; 2)$?

A. $x - 3y + 2 = 0$ B. $x + 3y + 2 = 0$ C. $3x - y + 2 = 0$ D. $x - 3y - 2 = 0$

2010. Extraordinário

【Resolução】

O declive da recta que passa por $(1; 1)$ e $(4; 2)$ é $\dfrac{2-1}{4-1} = \dfrac{1}{3}$.

Logo, a equação da recta que passa por $(1; 1)$ e tem o declive $\dfrac{1}{3}$

é: $y - 1 = \dfrac{1}{3}(x - 1) \Leftrightarrow 3y - 3 = x - 1 \Leftrightarrow x - 3y + 2 = 0$

Opção: A

⟵ O decllive da recta que passa pelos pontos $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ é $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

⟵ A equação da recta que passa pelo ponto $(x_1; y_1)$ e tem o declive m é dada por $y - y_1 = m(x - x_1)$

38.

Qual é o declive da recta perpendicular à recta da equação $y = -3x + 2$?

A. -3 B. $-\dfrac{1}{3}$ C. $\dfrac{1}{3}$ D. 3

2010. Extraordinário

【**Resolução**】

O declive da recta da equação $y = -3x + 2$ é -3.
Se m é o declive da recta perpendicular à recta da equação $y = -3x + 2$, então tem-se: $-3 \cdot m = -1 \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{3}$

Opção: C

⟵ O declive da recta de uma equação $y = ax + b$ é a.

⟵ Sejam m_1 e m_2 os declives das duas rectas l_1 e l_2.
★Se l_1 e l_2 são perpendiclares, então $m_1 \cdot m_2 = -1$.
★Se l_1 e l_2 são paralelas, então $m_1 = m_2$.

39.

Sendo $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2 + x$, qual é o valor de $(fog)(x)$?

A. $x^2 + x + 1$ B. $x^2 + 3x + 2$ C. $x^2 + 2x + 1$ D. $x^2 - x + 1$

2010. Extraordinário

【**Resolução**】

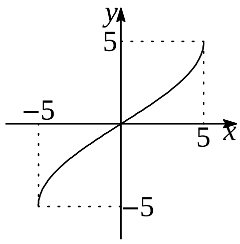
$(fog)(x) = f(\boldsymbol{g(x)}) = f(\boldsymbol{x^2 + x}) = (x^2 + x) + 1 = x^2 + x + 1$

Opção: A

⟵ **Função composta**: $(fog)(x) = f(g(x))$

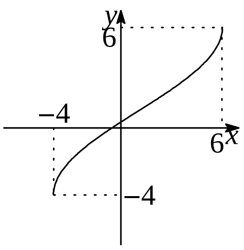
40.

Considere a função f, definida no intervalo $[-5; 5]$.

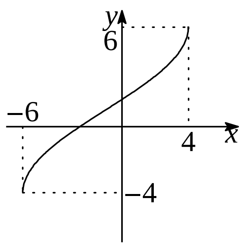


Qual dos seguintes gráficos pode ser o da função $g(x) = f(x + 1) + 1$?

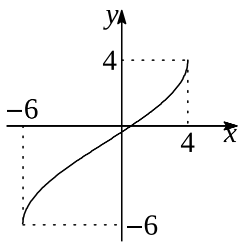
A.



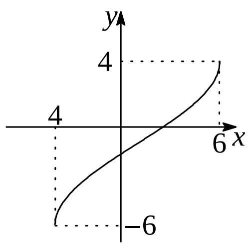
B.



C.



D.



2010. Extraordinário

【**Resolução**】

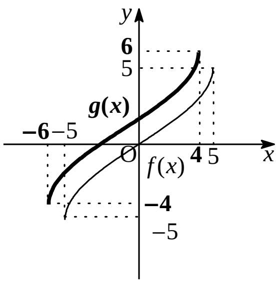
O gráfico da função

$$y = f(x + 1) + 1 \Leftrightarrow y = f[x - (\boldsymbol{-1})] + \boldsymbol{1}$$

obtém-se a partir do gráfico da função $y = f(x)$ através da translação de $\boldsymbol{-1}$ unidade para direita, ou seja, 1 unidade para esquerda, e de **1** unidade para cima.
Como o domínio da função $f(x)$ é $[-5; 5]$, o domínio da função $g(x)$ é: $[-5 \boldsymbol{-1}; 5 \boldsymbol{-1}] = [-6; 4]$
Como o contradomínio da função $g(x)$ é $[-5; 5]$, o contradomínio de $g(x)$ é: $[-5 + \boldsymbol{1}; 5 + \boldsymbol{1}] = [-4; 6]$
Por isso, o gráfico da função $g(x) = f(x + 1) + 1$ é da opção B.

Opção: B

⟵ O gráfico da função $y = f(x - \boldsymbol{p}) + \boldsymbol{q}$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = f(x)$ através da translação de $\boldsymbol{p}$ unidades para direita e $\boldsymbol{q}$ unidades para cima.



FIM

República de Moçambique

Matemática	**Ministério da Educação**	**1ª Época**
12ª Classe / 2010	**Conselho Nacional de Exames, Certificação e Equivalências**	**120 Minutos**

Esta prova contém 40 perguntas com 4 alternativas de resposta para cada uma. Escolha a alternativa correcta e *RISQUE* a letra correspondente na sua folha de respostas. Responda a todas as primeiras 35 perguntas. As últimas 5 perguntas responda somente às da sua secção (Letras ou Ciências). Na sua folha de respostas escreva a letra (L) se for Letras e (C) se for Ciências.

【Resolução】

1.

A expressão $p \wedge (q \vee \sim p)$, tendo p falso, é idêntica a...

A. F B. V C. $p \vee q$ D. $p \vee \sim q$

2010.1ªÉpoca

【Resolução】

Como p é falsa, então $\sim p$ é verdadeira.

$q \vee \sim p$ tambem é verdadeira pois $q \vee \mathrm{V} = \mathrm{V}$ independentemente do valor lógico de p.

Portanto, $p \wedge (q \vee \sim p)$ é falsa pois $\mathrm{F} \wedge \mathrm{V} = \mathrm{F}$.

Opção: A

⟵ $p \vee q$ é falsa se e só se p e q são falsas.
V é o elemento absorvente na disjunção: $A \vee \mathrm{V} = \mathrm{V}$

⟵ $p \wedge q$ é verdadeira se e só se p e q são verdadeiras.

2.

Sejam t e s duas proposições quaisquer. Qual é a expressão equivalente $\sim (t \Rightarrow s)$?

A. $\sim t \vee s$ B. $\sim t \wedge s$ C. $t \wedge \sim s$ D. $t \vee s$

2010.1ªÉpoca

【Resolução】

Como a negação da implicação equivale à conjunção do antecedente com a negação do consequente, tem-se:

$$\sim (t \Rightarrow s) = t \wedge \sim s$$

Opção: C

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

3.

Qual é a negação da expressão $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \geq 0$?

A. $\exists! x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 < 0$ B. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 < 0$ C. $\exists! x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \leq 0$ D. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \geq 0$

2010.1ªÉpoca

【Resolução】

Pelas segundas leis de De Morgan,

$\sim (\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \geq 0)$ é $!\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 < 0$.

Opção: A

⟵ **Segundas leis de De Morgan**

★ $\sim (\forall x : p) = !\exists x : \sim p$

★ $\sim (!\exists x : p) = \forall x : \sim p$

4.

Qual é o domínio da expressão $\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x-5} - \sqrt{2x-1}$?

A. $[-2; +\infty[$ B. $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ C. $\mathbb{R} \setminus \left\{-2; \frac{1}{2}\right\}$ D. $\mathbb{R}$

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

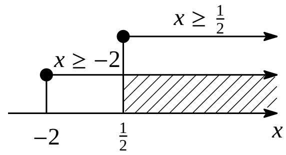
Esta expressão é uma a expressão irracional.
Como os índices 2 de $\sqrt{x+2}$ e $\sqrt{2x-1}$ são pares, tem-se as condições:

$$x+2 \geq 0 \ \land \ 2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2 \ \land \ x \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

Opção: B

⟵ **Expressão algébrica irracional** $\sqrt[n]{x}$:
★ Se o índice n é par, então $x \geq 0$.
★ Se o índice n é ímpar, então $x \in \mathbb{R}$.

⟵ 

5.

Quais são respectivamente os valores de a e b para que $\dfrac{8x}{x^2-2x-3} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-3}$?

A. -2 e 6 B. 0 e 6 C. 2 e 6 D. 4 e 6

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3} = \frac{a(x-3)+b(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$

⟵ $m.m.c\ (x+1; x-3) = (x+1)(x-3)$

$$= \frac{ax-3a+bx+b}{x^2-2x-3} = \frac{(a+b)x+(-3a+b)}{x^2-2x-3}$$

⟵ Ordena-se segundo as potências de x

Entã,o tem-se:

$$\frac{8x}{x^2-2x-3} = \frac{(a+b)x+(-3a+b)}{x^2-2x-3}$$

⟵ Iguala-se os numeradores de ambos os membros da equação.

$$\Leftrightarrow 8x = (a+b)x + (-3a+b)$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{8}x + \mathbf{0} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})x + (\mathbf{-3}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

Para que esta igualdade seja verdadeira, os coeficientes dos termos do mesmo grau dos seus dois membros devem ser iguais.
Logo, tem-se o seginte sistema:

⟵ Dois polinómios $P(x)$ e $Q(x)$ são **idênticos** se e só se os coeficientes dos termos do mesmo grau de x são iguais.

$$\begin{cases} a+b=8 & \cdots ① \\ -3a+b=0 & \cdots ② \end{cases}$$

⟵ Iguala-se os coeficientes dos termos do meso grau.

Calculando ① − ②, tem-se:

$$4a = 8 \Leftrightarrow a = 2$$

⟵
$$\begin{array}{rrcrcl} & a & + & b & = & 8 \\ -) & -3a & + & b & = & 0 \\ \hline & 4a & & & = & 8 \end{array}$$

Substituindo a por 2 na equação ①, tem-se:

$$2+b=8 \Leftrightarrow b=6$$

Portanto, a e b respectivamente são 2 e 6.

Opção: C

6.

Qual das expressões é racional inteira?

A. $\sqrt{2x} - 5x$ B. $\dfrac{1}{x+2}$ C. $\dfrac{\sqrt{5}}{x} + 4$ D. $\dfrac{x^2}{3} - x$

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

A expressão da opção A é irracional.
As expressões das opções B e C são racionais fraccionárias.
Só a expressão da opção D é racional inteira.

Opção: D

⟵ Uma expressão diz-se expressão algébrica **racional inteira** quando não se indica uma divisão em que a variável fica no divisor e não aparece sob sinal de radical.

7.

Quais são as raízes da equação $8x^6 + 7x^3 - 1 = 0$?

A. $\left\{-1; \dfrac{1}{8}\right\}$ B. $\left\{-1; \dfrac{1}{2}\right\}$ C. $\{-1; 1\}$ D. $\{2; -1\}$

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

A equação dada fica: $8(x^3)^2 + 7x^3 - 1 = 0$

$\longleftarrow x^6 = x^{3\cdot 2} = (x^3)^2$ porque $a^{mn} = (a^m)^n$

Fazendo $x^3 = t$, onde ($t \in \mathbb{R}$), tem-se a equação quadrática:

$$8t^2 + 7t - 1 = 0$$

Factorizando o primeiro membro, tem-se:

$$(8t-1)(t+1) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{8} \vee t = -1$$

$$\longleftarrow \begin{array}{ccccc} 8 & \times & -1 & \longrightarrow & -1 \\ 1 & & 1 & \longrightarrow & 8 \\ \hline & & & & 7 \end{array}$$

Se é difícil factorizar, então aplique a fórmula resolvente como a seguir:

$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-1) = 49 + 32 = 81$

Logo, $\sqrt{\Delta} = 9$.

Portanto, $t = \dfrac{-7 \pm 9}{2 \cdot 8}$

$= \dfrac{1}{8} \vee -1$

Substituindo t por x^3 tem-se:

$$x^3 = \frac{1}{8} \vee x^3 = -1$$

$$\Leftrightarrow x^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \vee x^3 = (-1)^3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = -1$$

$\longleftarrow$ Iguala-se as bases porque tem-se uma igualdade de duas potências com mesmo expoente ímpar, isto é $a^p = b^p \Leftrightarrow a = b$, onde p é um número ímpar.

Opção: B

8.

Qual é a solução do sistema $\begin{cases} 2^x + 2^y = \dfrac{3}{8} \\ x - y = 1 \end{cases}$?

A. $(-2; -3)$ B. $(-2; 3)$ C. $(2; -3)$ D. $(2; 3)$

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Seja o sistema $\begin{cases} 2^x + 2^y = \dfrac{3}{8} \\ x - y = 1 \Leftrightarrow x = y + 1 \end{cases}$

Substituindo x por $y+1$ na 1ªequação, tem-se:

$$2^{y+1} + 2^y = \frac{3}{8} \Leftrightarrow 2 \cdot 2^y + 2^y = \frac{3}{8}$$

$\longleftarrow 2^{y+1} = 2^y \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^y$ porque $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$\Leftrightarrow 2^y(2+1) = \frac{3}{8} \Leftrightarrow 3 \cdot 2^y = \frac{3}{8}$$

$\longleftarrow$ Coloca-se o factor comum 2^y em evidência.

$$\Leftrightarrow 2^y = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^y = 2^{-3}$$

$\longleftarrow \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2^3} = 2^{-3}$

$$\Leftrightarrow y = -3$$

$\longleftarrow$ Iguala-se os expoentes de dois membros porque as bases de ambos os membros da equação são iguais, isto é, $a^p = a^q \Leftrightarrow p = q$.

Substituindo y por -3 na 2ªequação, tem-se: $x = -3 + 1 = -2$

Logo, $(x, y) = (-2, -3)$.

Opção: A

9.

Um avião levanta voo sob um ângulo de 30°. Após percorrer 14 Km, a que altura se encontrará?

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{14}$ Km B. $\dfrac{14}{3}$ Km C. 7 Km D. $7\sqrt{3}$ Km

2010.1ªÉpoca

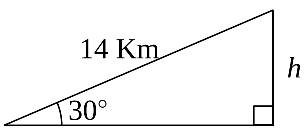
【**Resolução**】

Seja h o comprimento do cateto oposto do triângulo. Como h é a altura do avião após percorrer 14Km, tem-se:

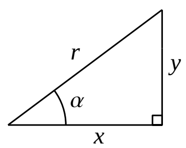
$$\text{sen}30° = \frac{h}{14}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{14} \Leftrightarrow 2h = 14$$

$$\Leftrightarrow h = 7$$



$\longleftarrow$



★ $\text{sen}\alpha = \dfrac{y}{r}$

★ $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$

★ $\text{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$

Opção: C

10.

Qual é a distância entre as abcissas $-\frac{1}{5}$ e $\frac{3}{4}$?

A. $-\frac{19}{20}$ B. $-\frac{11}{20}$ C. $\frac{11}{20}$ D. $\frac{19}{20}$

2010.1ªÉpoca

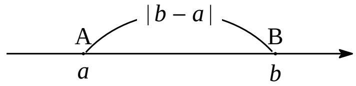
【**Resolução**】

$$\left|\frac{3}{4}-\left(-\frac{1}{5}\right)\right| = \left|\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right| = \left|\frac{15}{20}+\frac{4}{20}\right|$$

$$= \left|\frac{19}{20}\right| = \frac{19}{20}$$

Opção: D

⟵ A distância entre os pontos A(a) e B(b) situados no eixo das abcissas é $\overline{AB} = |b-a|$ ou $|a-b|$



11.

Qual é a solução da inequação $\left|\frac{5x}{3}\right| \geq -5$?

A. $x \in \{\ \ \}$ B. $x < -3$ C. $x \geq -3$ D. $\mathbb{R}$

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Como o módulo de qualquer número real é maior ou igual a 0, então $\left|\frac{5x}{3}\right| \geq 0$.

Por isso, é sempre verdade que $\left|\frac{5x}{3}\right| \geq -5, \forall x \in \mathbb{R}$.

Opção: D

⟵ $|a|$ significa a **distancia** entre a origem e o ponto A(a) situado no eixo das abcissas.
Logo, deve ser **$|a| \geq 0$**.

12.

Qual é a forma mais simples da expressão $\frac{(n+1)!+(n+1)\cdot(n-1)!}{(n+1)\cdot(n-1)!}$?

A. $n+1$ B. $n(n+2)$ C. $n!$ D. $(n+1)!$

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$$\frac{(n+1)!+(n+1)\cdot(n-1)!}{(n+1)\cdot(n-1)!}$$

$$= \frac{\mathbf{(n+1)}\cdot n\cdot\mathbf{(n-1)!}+\mathbf{(n+1)\cdot(n-1)!}}{(n+1)\cdot(n-1)!}$$

$$= \frac{\cancel{\mathbf{(n+1)\cdot(n-1)!}}\cdot(n+1)}{\cancel{(n+1)\cdot(n-1)!}} = n+1$$

Opção: A

◇ $n!$ é o produto de n facotores naturais e sucessivos desde n até 1.

$$\mathbf{n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$

⟵$(n+1)! = (n+1)n\overbrace{(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}^{(n-1)!}$
$= (n+1)n(n-1)!!$

⟵Coloca-se o facor comun $(n+1)(n-1)!$ em evidência.

13.

Na equação $C^2_{n+1} = 21$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, qual é o valor de n?

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$$C^2_{n+1} = 21 \Leftrightarrow \frac{A^2_{n+1}}{2!} = 21$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)n}{2} = 21 \Leftrightarrow (n+1)n = 42$$

$$\Leftrightarrow n^2+n-42 = 0 \Leftrightarrow (n+7)(n-6) = 0$$

$$\Leftrightarrow n = -7 \vee n = 6$$

Como $n > 1$, $n = 6$.

Opção: C

⟵ $C^p_n = \frac{A^p_n}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}^{p \text{ factores}}}{p(p-1)\cdots 2\cdot 1}$

⟵ ★ $A^2_{n+1} = (n+1)n$; ★ $2! = 2\cdot 1 = 2$

⟵ Factoriza-se n^2+n-42 aplicando $x^2+(a+b)x+ab = (x+a)(x+b)$.

⟵ $n = -7$ não satisfaz a condição $n > 1$.

14.

Quantos números de 3 algarismos diferentes podem ser escritos com os algarismos do conjunto M = $\{1; 3; 7; 8; 9\}$?

A. 10 B. 15 C. 60 D. 125

2010.1ªÉpoca

【Resolução】

O conjunto M tem 5 elementos.

Deseja-se o número total das maneiras diferentes possíveis de escolher 3 elementos dentre 5 elementos e em seguida permutar os 3 elementos entre si.

Como interessa a ordem, trata-se de um arranjo de 5 tomados 3 a 3, isto é:

$$A_5^3 = \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3}_{\text{3 factores}} = 60$$

Opção: C

⟵ $\mathbf{A_n^p}$ é o número total das maneiras possiveis de **escolher** p elementos dentre n elementos e **permutar** os p elementos entre si. Se **interessa a ordem**, então aplica-se um arranjo A_n^p. Se não interessa a ordem, então aplica-se uma combinação C_n^p.

⟵ $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ factores}}$

15.

Numa determinada empresa há 20 trabalhadores, dos quais 8 são eventuais e 12 são efectivos. Deseja-se formar uma comissão de 2 trabalhadores para representar a empresa numa reunião sobre a concertação salarial. Qual é a probabilidade de os dois trabalhadores escolhidos ao acaso serem efectivos?

A. $\dfrac{33}{95}$ B. $\dfrac{2}{5}$ C. $\dfrac{3}{5}$ D. $\dfrac{94}{95}$

2010.1ªÉpoca

【Resolução】

O número de casos possíveis é C_{20}^2 porque escolhe 2 trabalhadores dentre 20 trabalhadores.

O número de casos favoráveis é C_{12}^2 porque escolhe 2 trabalhadores efectivos dentre 12 efectivos.

Portanto, a probabilidade pedida é:

$$\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = \frac{\dfrac{12 \cdot 11}{2}}{\dfrac{20 \cdot 19}{2}} = \frac{12 \cdot 11}{20 \cdot 19} = \frac{33}{95}$$

Opção: A

⟵ $\mathbf{C_n^p}$ é o número total das maneiras possíveis de **escolher** p elementos dentre n elementos. **Não interessa ordem**.

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}^{p \text{ factores}}}{p(p-1)\cdots 2 \cdot 1}$$

⟵ A probabilidade de um acontecimento A é dada por:

P(A)= $\dfrac{\textbf{número de casos favoráveis}}{\textbf{número de casos possíveis}}$

16.

Qual é o quinto termo da sucessão $\dfrac{15}{256}; \dfrac{15}{64}; \dfrac{15}{16}; \ldots$?

A. 10 B. 15 C. 20 D. 25

2010.1ªÉpoca

【Resolução】

Como o quociente entre dois termos consecutivos da sucessão é constante 4, esta sucessão é uma PG em que $a_1 = \dfrac{15}{256}$ e $q = 4$.

Logo, o termo geral desta PG é:

$$a_n = \frac{15}{256} \cdot 4^{n-1} = \frac{15}{4^4} \cdot 4^{n-1} = 15 \cdot 4^{n-5}$$

Portanto, o quinto termo é:

$$a_5 = 15 \cdot 4^{5-5} = 15 \cdot 4^0 = 15 \cdot 1 = 15$$

Opção: B

⟵ $\dfrac{15}{256}, \dfrac{15}{64}, \dfrac{15}{16}, \ldots$ ×4 ×4 ×4

⟵ O termo geral de uma PG é dado por $a_n = a_1 q^{n-1}$. O termo geral de uma PA é dado por $a_n = a_1 + (n-1)d$.

★ $\dfrac{4^{n-1}}{4^4} = 4^{n-1-4} = 4^{n-5}$ porque $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

⟵ Substitui-se n por 5 na expressão do termo geral

17.

Dada a sucessão $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \ldots$, qual é a ordem do termo $\frac{1}{256}$?

A. 8 B. 16 C. 32 D. 64

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Como o quociente entre dois termos consecutivos da sucessão é constante $\frac{1}{2}$, esta sucessão é uma PG em que $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$.

$\longleftarrow \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ $\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{2}$ $\times\frac{1}{2}$

Então, o termo geral desta PG é: $a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\longleftarrow$ O termo geral de uma PG é dado por $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Para se obter a ordem do termo $\frac{1}{256}$, resolve-se $a_n = \frac{1}{256}$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{256} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^8 \Leftrightarrow n = 8$$

$\longleftarrow 256 = 2^8$

Portanto, a ordem do termo $\frac{1}{256}$ é 8.

Opção: A

18.

Qual das sucessões é divergente?

A. $\frac{n-1}{n+1}$ B. $\frac{n+1}{n}$ C. $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ D. $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Calcula-se o limite de cada sucessão das opções dadas:

A. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathbf{1} \cdot n - 1}{\mathbf{1} \cdot n + 1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}} = 1$

B. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\mathbf{1} \cdot n + 1}{\mathbf{1} \cdot n} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}} = 1$

$\longleftarrow$ Como o numerador e o denominador têm o mesmo grau , o limite da sucessão é igual ao quociente dos coeficientes dos termos de maior grau.

C. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$

$\longleftarrow$ Se $r > 1$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} r^n = +\infty$.

D. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

$\longleftarrow$ Se $|r| < 1$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} r^n = 0$.

Por isso, as sucessões das opções A, B e D são convergentes e a sucessão da opção C é divergente.

$\longleftarrow$ Uma sucessão a_n é **convergente** se $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$. Uma sucessão a_n que não é convergente é **divergente**.

Opção: C

19.

De uma progressão aritmética sabe-se que o primeiro termo é 5 e o quarto é 17. Qual é o valor do termo de ordem 3?

A. 12 B. 13 C. 14 D. 15

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Pela condição, tem-se: $a_1 = 5$ e $a_4 = 17$.

Como o termo geral de uma PA é $a_n = a_1 + (n-1)d$, tem-se:

$\longleftarrow$ O termo geral de uma **PA** é $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$.

$$a_4 = 5 + (4-1)d = 5 + 3d.$$

Como $a_4 = 17$, tem-se:

$$5 + 3d = 17 \Leftrightarrow 3d = 12 \Leftrightarrow d = 4$$

Portanto, o valor do termo da ordem 3 é:

$$a_3 = 5 + (3-1)4 = 13$$

$\longleftarrow$ Substitui-se $a_1 = 5$, $n = 3$ e $d = 4$ em $a_n = a_1 + (n - 19d$.

Opção: B

20.

Qual é o valor de $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-3}\right)^{2n}$?

A. e^0 B. e C. e^2 D. e^8

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-3}\right)^{2n} = [1^\infty]$$
$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-3}-1\right)\cdot 2n}$$
$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1-(n-3)}{n-3}\cdot 2n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n}{n-3}}$$
$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathbf{8}n}{\mathbf{1}\cdot n-3}}$$
$$= e^{\frac{8}{1}} = e^8$$

Opção: D

$\longleftarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n-3} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathbf{1}\cdot n+1}{\mathbf{1}\cdot n-3} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}} = 1$

$\longleftarrow$ Para levantar a indeterminação do tipo 1^∞, utiliza-se a seguinte fórmula:
Sejam $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$. Então tem-se:
$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = [1^\infty] = e^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\cdot g(x)}$, onde e chama-se número de Nepper; tal que $e = 2,7183\cdots$

21.

Qual é o período da função $f(x) = \cos\left(1 - \dfrac{x}{3}\right)$?

A. $\dfrac{\pi}{6}$ B. $\dfrac{\pi}{3}$ C. 3π D. 6π

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$f(x) = \cos\left(1 - \dfrac{x}{3}\right) = \cos\left(-\dfrac{x}{3} + 1\right)$.

Como o coeficiente de x de $\cos\left(-\dfrac{x}{3}\right)$ é $-\dfrac{1}{3}$, o período é:

$$p = \frac{2\pi}{\left|-\frac{1}{3}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$$

Opção: D

⋄ Seja $k \in \mathbb{R}$.
★ Os períodos de $y = \text{sen}kx$ e $y = \cos kx$ são $p = \dfrac{2\pi}{|k|}$.
★ O período de $y = \text{tg}kx$ é $p = \dfrac{\pi}{|k|}$.

$\longleftarrow \dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}} = \dfrac{2\pi\times 3}{\frac{1}{\cancel{3}}\times\cancel{3}} = 6\pi$

22.

Qual é o contradomínio da função $g(x) = |-x+1|$?

A. $\mathbb{R}^-$ B. $\mathbb{R}_0^-$ C. $\mathbb{R}_0^+$ D. $\mathbb{R}$

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Como $|-x+1| \geq 0$, o contra domínio de $g(x) = |-x+1|$ é $[0;+\infty[$, isto é, $\mathbb{R}_0^+$.

Opção: C

$\longleftarrow$ O módulo de qualquer número real é sempre maior ou igual a zero, isto é, $|a| \geq 0,\ \forall a \in \mathbb{R}$
★ $\mathbb{R}^- = \{x|x < 0\}$ ★ $\mathbb{R}_0^- = \{x|x \leq 0\}$
★ $\mathbb{R}_0^+ = \{x|x \geq 0\}$ ★ $\mathbb{R} = \{x|-\infty \leq x \leq +\infty\}$.

23.

Quais são os zeros da função $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+2x}$?

A. $\{-2;0\}$ B. $\{-1;1\}$ C. $\{-2;-1\}$ D. $\{0;1\}$

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

O domínio da função é:

$$x^2+2x \neq 0 \Leftrightarrow x(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \neq -2$$

$\longleftarrow$ O denominador é diferente de zero.

Para se obter os zeros da função, substituindo y por 0, tem-se:

$$\frac{x^2-1}{x^2+2x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$$

$\longleftarrow$ Multiplica-se ambos os membros da equação por $x^2 + 2x$ porque $x^2+2x \neq 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$$

$\longleftarrow a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

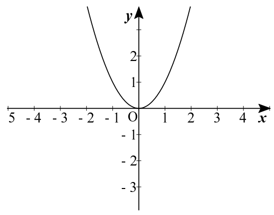
Como $x = -1$ e $x = 1$ pertencem ao domínio, a solução é $\{-1;1\}$

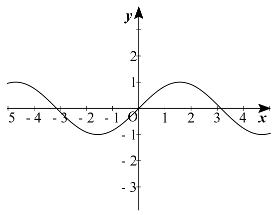
$\longleftarrow x = -1$ e $x = 1$ são diferentes de $x = 0$ e $x = -2$.

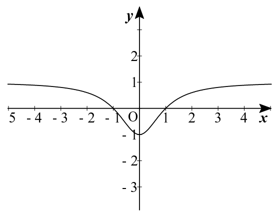
Opção: B

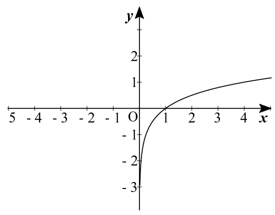
24.

Qual dos gráficos representa uma função injectiva?

A.


B.


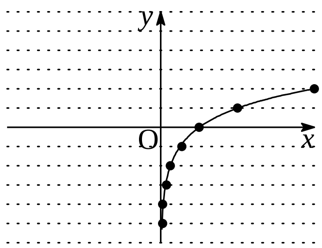
C.


D.


2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

O gráfico da função da opção D representa uma função bijectiva porque cada uma das rectas paralelas ao eixo de xx corta o gráfico em um só ponto.



Como a função da opção D é bijectiva, então é injectiva.

As funções das opções A, B e D não são injectivas nem sobrejectivas.

Opção: D

⟵ ★Se cada uma das rectas palalelas ao eixo de xx cortar o gráfico em um só ponto ou não cortar o gráfico de uma função, então a função é **injectiva**.

★Se cada uma das rectas palalelas ao eixo de xx cortar o gráfico uma função em um ou mais pontos, então a função é **sobrejectiva**.

★Se cada uma das rectas palalelas ao eixo de xx cortar o gráfico uma função em um só ponto , então a função é **bijectiva**. (Se uma função for simultaneamente injectiva e sobrejectiva, então a função é bijectiva.)

25.

Dada a função $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$. Quais são as equações das assímptotas vertical e horizontal?

A. $x = -2$ e $y = 1$ B. $x = 1$ e $y = 2$ C. $x = 1$ e $y = 1$ D. $x = 1$ e $y = -1$

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

A função $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1} = \dfrac{2\cdot x-1}{1\cdot x-1}$ é homográfica.

A assímptota vertical é: $x = -\dfrac{-1}{1} = 1$

A assímptota horizontal é: $y = \dfrac{2}{1} = 2$

Opção: B

Uma função do tipo $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ é homográfica cujas assímptotas vertical e horizontal são dadas pelas seguintes equações:

★AV : $x = -\dfrac{d}{c}$ (⟵ Zero do denominador)

★AH : $y = \dfrac{a}{c}$ (⟵ Quociente dos coeficientes de x)

26.

Sabe-se que o gráfico da função $p(x) = x^3 + (a-2)x + b$ passa pelos pontos $(-1; 0)$ e $(2; 0)$. Qual é o valor de $p(0)$?

A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Como o gráfico de $p(x)$ passa por $(-1; 0)$ e $(2; 0)$, tem-se:

$$p(-1) = 0 \text{ e } p(2) = 0.$$

⟵ Se o gráfico de uma função $y = f(x)$ passa pelo ponto $(a; b)$, então $f(a) = b$.

Como $p(-1) = 0$, então tem-se:

$$(-1)^3 + (a-2)(-1) + b = 0 \Leftrightarrow -a + b = -1 \cdots ①$$

⟵ Substitui-se x por -1 em $p(x)$.

Como $p(2) = 0$, então tem-se:

$$2^3 + (a-2)\cdot 2 + b = 0 \Leftrightarrow 2a + b = -4 \cdots ②$$

⟵ Substitui-se x por 2 em $p(x)$.

Calculando ① − ②, tem-se: $-3a = 3 \Leftrightarrow a = -1$

Substituindo a por -1 em ②, tem-se: $2(-1)+b = -4 \Leftrightarrow b = -2$

⟵ Substitui-se a por -1 e b por -2 em $p(x)$.

Portanto, tem-se: $p(x) = x^3 + (-1-2)x - 2 = x^3 - 3x - 2$

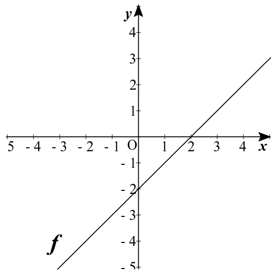
Logo, tem-se: $p(0) = 0^3 - 3\cdot 0 - 2 = -2$

⟵ Substitui-se x por 0 em $p(x) = x^3 - 3x - 2$.

Opção: A

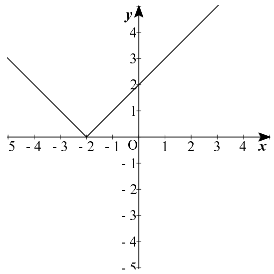
27.

A figura representa o gráfico da função $y = f(x)$.

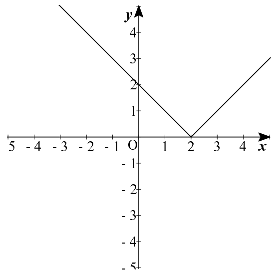


Qual é o gráfico que representa $y = f(|x|)$?

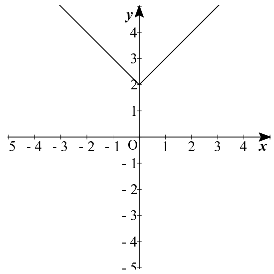
A.



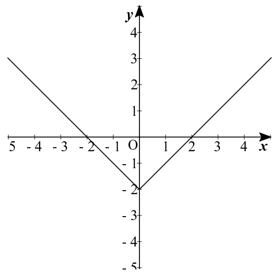
B.



C.



D.



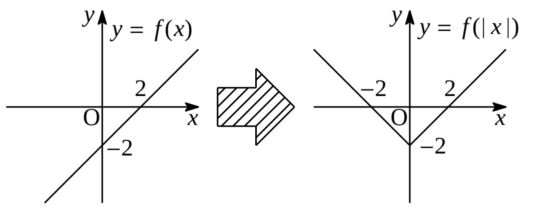
2010.1ªÉpoca

【Resolução】

O gráfico de uma função $y = f(|x|)$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = f(x)$ através da simetria em relação ao eixo dos yy, representando os pontos que estão à direita do eixo dos yy à esquerda do mesmo eixo.

Portanto, o gráfico da função $f(|x|)$ é D.

Opção: D



◇ Como $f(|-x|) = f(|x|)$, $y = f(|x|)$ é uma função par.

28.

Se $\forall x_1; x_2 \in D_f$ com $x_1 > x_2$ tivermos $f(x_1) < f(x_2)$ diz-se que a função $y = f(x)$ é...

A. bijectiva B. crescente C. decrescente D. sobrejectiva

2010.1ªÉpoca

【Resolução】

Se $\forall x_1; x_2 \in D_f$ com $\boldsymbol{x_1 > x_2}$ tivermos $\boldsymbol{f(x_1) < f(x_2)}$ diz-se que a função $y = f(x)$ é **decrecente**.

Opção: C

⟵ Se $\forall x_1; x_2 \in D_f$ com $\boldsymbol{x_1 > x_2}$ tivermos $\boldsymbol{f(x_1) > f(x_2)}$ diz-se que a função $y = f(x)$ é **crescente**.

29.

Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 1, & \text{se } x > 0 \\ x + 1, & \text{se } x \le 0 \end{cases}$, em $x = 0$ $f(x)$ é...

A. contínua. B. contínua apenas à direita.
C. contínua apenas à esquerda. D. descontinua.

2010.1ªÉpoca

【Resolução】

Calcula-se os limites laterais de $x = 0$ e o valor da função $f(x)$ em $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^2 + 3x + 1) = 0^2 + 3\cdot 0 + 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x + 1) = 0 + 1 = 1$$

$$f(0) = 0 + 1 = 1$$

Portanto, conclui-se que: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$.

Por isso, a função $f(x)$ é contínua em $x = 0$.

Opção: A

⟵ Uma função f é contínua no ponto $x = a$
$\Leftrightarrow \exists f(a), \exists \lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
$\Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

Uma função que não é contínua no ponto $x = a$ é descontínua nesse ponto.

30.

O valor de k para que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{kx^2+12x+5}{4x^2+6}=0$ é...

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$$\lim_{x\to\infty}\frac{kx^2+12x+5}{4x^2+6}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{kx^2+12x+5}{x^2}}{\dfrac{4x^2+6}{x^2}}$$

⟵ Para levantar a indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, divide-se o numerador e o denominador pela potência máxima do denominador.

Neste caso, como o denominador $4x^2+6$ é do 2° grau, divide-se o numerador e o denominador por x^2.

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{k+\dfrac{12}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{4+\dfrac{6}{x^2}}$$

$$=\frac{k+0+0}{4+0}=\frac{k}{4}$$

⟵ Substitui-se x por ∞.

Como $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{kx^2+12x+5}{4x^2+6}=0$, então tem-se:

$$\frac{k}{4}=0\Leftrightarrow k=0$$

Opção: A

【**Outra resolução**】

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\boldsymbol{k}x^2+12x+5}{\mathbf{4}x^2+6}=\frac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{4}}$$

Por isso, tem-se: $\dfrac{k}{4}=0\Leftrightarrow k=0$

⟵ Se o numerador e o denominador têm o mesmo grau, então o limite quando $x\to\infty$ é igual ao quociente dos coeficientes dos termos de maior grau, isto é: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\boldsymbol{a_1}x^n+b_1x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots}{\boldsymbol{a_2}x^n+b_2x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots}=\dfrac{\boldsymbol{a_1}}{\boldsymbol{a_2}}$

31.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$?

A. 2 B. 4 C. 16 D. 32

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$$\lim_{x\to2}\frac{x^4-16}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to2}\frac{(x^2)^2-4^2}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x-2}$$

⟵ Factorização: $(x^2)^2-4^2=(x^2-4)(x^2+4)$ aplicando $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

$$=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)(x^2+4)}{\cancel{x-2}}$$

⟵ $x^2-4=x^2-2^2=(x-2)(x+2)$

$$=\lim_{x\to2}(x+2)(x^2+4)$$

$$=(2+2)(2^2+4)=4\cdot8=32$$

⟵ Substitui-se x por 2.

Opção: D

32.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}5x}{\cos2x}$?

A. 0 B. 2,5 C. 5 D. $+\infty$

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}5x}{\cos2x}=\frac{\operatorname{sen}5\cdot0}{\cos2\cdot0}=\frac{\operatorname{sen}0}{\cos0}=\frac{0}{1}=0$$

⟵ Como não é nenhuma indeterminação, substitui-se x por 0 logo.

★ $\operatorname{sen}0=0$ ★ $\cos0=1$

Opção: A

33.

Dada a função $f(x) = (x-5)\cdot e^x$, qual é o valor de $f'(0)$?

A. $-e^4$ B. -4 C. 4 D. e^4

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Calcula-se $f'(x)$:

$$f'(x) = [(x-5)\cdot e^x]' = (x-5)'\cdot e^x + (x-5)\cdot(e^x)'$$
$$= 1\cdot e^x + (x-5)\cdot e^x$$
$$= e^x + x\cdot e^x - 5e^x = x\cdot e^x - 4e^x$$

$\longleftarrow [f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$\longleftarrow (e^x)' = e^x$

Portanto, tem-se:

$$f'(0) = 0\cdot e^0 - 4e^0 = -4\cdot 1 = -4$$

$\longleftarrow$ Substitui-se x por 0 em $f'(x) = x\cdot e^x - 4e^x$

Opção: B

34.

Em que ponto a recta de equação $y = -x - 1$ é tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2 + x$?

A. $(-1; 0)$ B. $(0; 3)$ C. $(1; 3)$ D. $(2; 2)$

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Calcula-se: $f'(x) = 2x + 1$

$\longleftarrow (x^2 + x)' = 2x + 1$

Se a recta $y = -x - 1$ cujo declive é -1 é tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 + x$ em $x = a$, então $f'(a) = -1$.

$\longleftarrow$ O declive da equação da recta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em $x = a$ é igual a $f'(a)$

Como $f'(a) = 2a + 1$, tem-se:

$$2a + 1 = -1 \Leftrightarrow 2a = -2 \Leftrightarrow a = -1$$

Portanto, a abcissa do ponto de tangência é $x = \mathbf{-1}$.

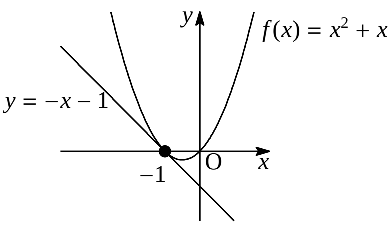
$\longleftarrow$ A recta $y = -x - 1$ é tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 + x$ em $\mathbf{x = -1}$.

A seguir, calcula-se a ordenada do ponto de tangência:

Como o gráfico da função $f(x) = x^2 + x$ passa pelo ponto de tangência, a abcissa do ponto de tangência é:

$$f(\mathbf{-1}) = (-1)^2 - 1 = 0$$

Logo, o ponto de tangência é $(-1, 0)$.



Opção: A

35.

Qual é a primeira derivada da função $f(x) = \dfrac{4^x}{x^4}$?

A. $\dfrac{x\cdot 4^{x-1}}{4x^3}$ B. $\dfrac{4^x(x\cdot\ln 4 - 4)}{x^5}$ C. $\dfrac{4^x(x-4)}{x^5}$ D. $\dfrac{4^x(x\cdot\ln 4 - 4)}{x^8}$

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$$f'(x) = \left(\frac{4^x}{x^4}\right)' = \frac{(4^x)'\cdot x^4 - 4^x\cdot(x^4)'}{(x^4)^2}$$

$\longleftarrow \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

$$= \frac{4^x\ln 4\cdot x^4 - 4^x\cdot 4x^3}{x^8}$$

$\longleftarrow (4^x)' = \ln 4$ porque $(a^x)' = a^x\ln a$;
$(x^4)' = 4x^3$ porque $(x^n)' = nx^{n-1}$

$$= \frac{4^x x^3(x\ln 4 - 4)}{x^8}$$

$\longleftarrow 4^x\ln 4\cdot x^4 - 4^x\cdot 4x^3 = \mathbf{4^x x^3}\cdot x\ln 4 - \mathbf{4^x x^3}\cdot 4$
$= \mathbf{4^x x^3}(x\ln 4 - 4)$

$$= \frac{4^x(x\ln 4 - 4)}{x^5}$$

$\longleftarrow \dfrac{x^3}{x^8} = x^{3-8} = x^{-5} = \dfrac{1}{x^5}$

Opção: B

Somente para a Secção de Letras

36.
A expressão $1 - \operatorname{sen}x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg}x$ é equivalente à...

A. $\operatorname{sen}^2 x$ B. $1 - \operatorname{sen}x$ C. $\cos^2 x$ D. $1 - \operatorname{tg}x$

2010.1ªÉpoca

【Resolução】

$$1 - \operatorname{sen}x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg}x = 1 - \operatorname{sen}x \cdot \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$$
$$= 1 - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x$$

Opção: C

$\longleftarrow$ Substitui-se $\operatorname{tg}x$ por $\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x}$ porque $\operatorname{tg}x = \frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}$

$\longleftarrow \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow 1 - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x$

37.
Qual é o valor do ângulo θ, para o qual $\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$; sendo $180° \leq \theta \leq 360°$?

A. 270° B. 225° C. 210° D. 180°

2010.1ªÉpoca

【Resolução】

$\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \Leftrightarrow \operatorname{sen}\theta - \cos\theta = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\operatorname{sen}(\theta - 45°) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(\theta - 45°) = 0$

Fazendo $\theta - 45° = t$, $\operatorname{sen}t = 0$.

Como $180° \leq \theta \leq 360°$, $135° \leq t \leq 315°$.

Logo, a solução de $\operatorname{sen}t = 0$ $(135° \leq t \leq 315°)$ é $t = 180°$.

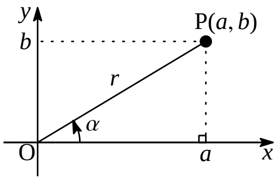
Como $t = \theta - 45°$, então:

$\theta - 45° = 180 \Leftrightarrow \theta = 225°$

Opção: B

< Transformação de $a\operatorname{sen}\theta + b\cos\theta$ >

Seja o ponto P a extremidade de um segmento com outra extremidade na origem do sistema cartesiano, $\overline{OP} = r$ e α o ângulo produzido pelo segmento OP em relação ao eixo das abcissas.



$$\boldsymbol{a\operatorname{sen}\theta + b\cos = r \cdot \operatorname{sen}(\theta + \alpha) = \sqrt{a^2 + b^2}\operatorname{sen}(\theta + \alpha)}$$

【Outra resolução】

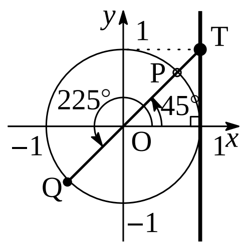
Dividindo ambos os membros da equação $\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$ por $\cos\theta$, tem-se: $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\theta = 1$

Resolve-se a equação $\operatorname{tg}\theta = 1$ com $0° \leq \theta \leq 360°$.

Toma-se o ponto T(1; 1).

Sejam P e Q os dois pontos das intersecções da recta OT com o círculo torigonométrico.

Como os ângulos θ pedidos são formados pelo segmento OP com o eixo das abcissas no sentido positivo e pelo segmento OQ com o eixo das abcissas no sentido positivo, tem-se $\theta = 45$ e $\theta = 225°$. Como $180° \leq \theta \leq 360°$, $\theta = 225°$.



$\longleftarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

$\longleftarrow$ As soluções da equação $\operatorname{tg}\theta = \boldsymbol{\alpha}$ são os ângulos formados pelo segmento OP com o eixo das abcissas no sentido positivo e pelo semento OQ com o eixo das abcissas no sentido positivo, onde os pontos P e Q são as intersecções da recta OT com o círculo trigonométrico, onde o ponto T é $(1; \boldsymbol{\alpha})$.

38.
Qual é a alternativa que NÃO é correcta?

A. $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ B. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ C. $\mathbb{R} \cup \mathbb{N} = \mathbb{R}$ D. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$

2010.1ªÉpoca

【Resolução】

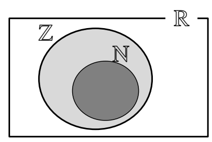
Verifica-se se cada alternativa é correta ou não.

A. $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ porque $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
B. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \neq \mathbb{N}$ porque $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ é exterior de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
C. $\mathbb{R} \cup \mathbb{N} = \mathbb{R}$ porque $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$
D. $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ porque $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Portanto, a alternativa que não é correcta é B.

Opção: B

$\longleftarrow \mathbb{R} = \{\text{Números reais}\}$
$\mathbb{Z} = \{\text{Números inteiros}\}$
$= \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$
$\mathbb{N} = \{\text{Números naturais}\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

39.
No universo $\mathbb{R}$, dados os conjuntos: $M = \{x \in \mathbb{R} : -10 < x < 0\}$ e $P = [-2; 5[$. A que é igual o conjunto $\overline{M \cap P}$?

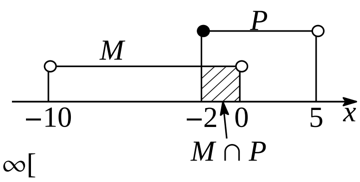
A. $]-\infty; -2[$ B. $]0; +\infty[$ C. $]-\infty; -2[\cup[0; +\infty[$ D. $]-\infty; 2] \cup [0; +\infty[$

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$\overline{M \cap P}$ é o complementar do conjunto $M \cap P$.
Como $M \cap P = [-2; 0[$, então tem-se:

$$\overline{M \cap P} =]-\infty; -2[\cup[0; +\infty[$$



Opção: C

⟵ Como $M \cap P = \{x \mid -2 \le x \le 0\}$, então $\overline{M \cap P} = \{x \mid x < -2 \vee 0 < x\}$.

40.
Numa turma, 19 dos 52 alunos gostam de Inglês, 8 gostam de Física e 6 gostam das duas disciplinas. Quantos alunos NÃO gostam de Inglês NEM de Física?

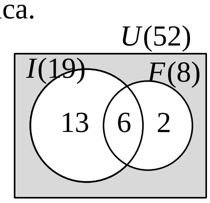
A. 25 B. 31 C. 32 D. 33

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Sejam:
U-Conjunto de todos os alunos da turma;
I- Conjunto dos alunos que gostam de Inglês;
F-Conjunto dos alunos que gostam de Física.

Constroi-se o diagramma como a figura mostra.



A partir do diagramma, os alunos que não gostam de Inglês nem de Física são:
$52 - (13 + 6 + 2) = 52 - 21 = 31$

Opção: B

⟵ Nota-se que:
$n(U) = 52$, $n(I) = 19$, $n(F) = 8$ e $n(I \cap F) = 6$
Os alunos que gostam só de Ingleles são:
$19 - 6 = 13$
Os alunos que gostam só de Física são:
$8 - 6 = 2$

Somente para a Secção de Ciências

36.
Qual é o ponto médio do segmento cujos pontos extremos são P(1; −4) e R(−5; 2)?

A. (−2; −1) B. (−1; −2) C. (1; 2) D. (2; 1)

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

O ponto médio do segmento cujos pontos extremos são P(1; −4) e R(−5; 2) é: $\left(\frac{1 + (-5)}{2}; \frac{-4 + 2}{2}\right) = (-2; -1)$

Opção: A

⟵ Sejam $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$. Então, o ponto médio do segmento AB é $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

37.
Qual é o declive da recta que passa pelos pontos P(3; 5) e R(6; −1)?

A. −2 B. −1 C. 2 D. 3

2010.1ªÉpoca

【**Resolução**】

O declive da recta que passa pelos pontos P(3; 5) e R(6; −1) é:

$$\frac{-1 - 5}{6 - 3} = \frac{-6}{3} = -2$$

Opção: A

⟵ O decllive da recta que passa pelos pontos $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ é $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

38.

Qual é a inversa da função $f(x) = 2^x - 1$?

A. $f^{-1}(x) = \log_2 x + 1$ B. $f^{-1}(x) = \log_2 x - 1$ C. $f^{-1}(x) = \log_2(x+1)$ D. $f^{-1}(x) = \log_2(x-1)$

2010.1ªÉpoca

【Resolução】

Substituindo $f(x)$ por y, tem-se: $y = 2^x - 1$

Resolve-se em ordem a x:

$$2^x = y + 1 \Leftrightarrow \log_2 2^x = \log_2(y+1)$$

$$\Leftrightarrow x = \log_2(y+1)$$

Trocando as variáveis x por y e y por x, tem-se: $y = \log_2(x+1)$, que é a função inversa pedida, $f^{-1}(x) = \log_2(x+1)$.

Opção: C

Passos para obter a inversa de uma função $f(x)$:

1. Substitui-se $f(x)$ por y.

2. Resolve-se em ordem a x.

3. Troca-se as variáveis x por y e y por x.

⟵ Adopta-se $\log_2$ para ambos os membros.

⟵ $\log_2 2^x = x$ porque $\log_a a^p = p$

⟵ A inversa de uma função exponencial é uma função logarítmica.

39.

Seja $f(x) = x^2 - 2x$ e $g(x) = ax + b$ onde a e b são números reais. Nestas condições, a que é igual $(fog)(0)$?

A. 0 B. b C. $2b - b^2$ D. $b^2 - 2b$

2010.1ªÉpoca

【Resolução】

$(fog)(0) = f[\boldsymbol{g(0)}] = f(\boldsymbol{b}) = b^2 - 2b$

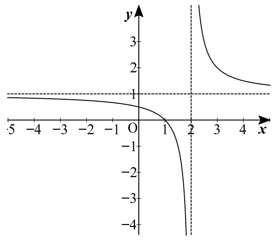
Opção: D

⟵ $(fog)(a) = f[g(a)]$; $g(0) = a \cdot 0 + b = b$

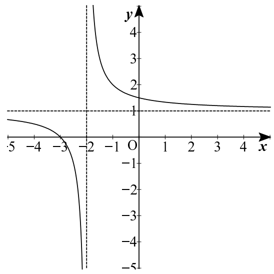
40.

Sendo $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, qual é o gráfico que representa $g(x) = f(x-2) + 1$?

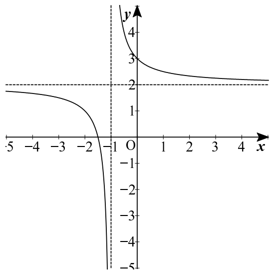
A.



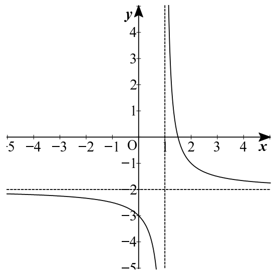
B.



C.



D.



2010.1ªÉpoca

【Resolução】

Como $g(x) = f(x - \mathbf{2}) + \mathbf{1}$, o gráfico de $g(x)$ obtém-se a partir do gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ através da translação **2** unidades para direita e **1** unidade para cima.

Então , o centro do gráfico de $g(x)$ é $(2; 1)$ porque o centro do gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é a origem.

Logo, o gráfico de $g(x)$ é o gráfico da opção A.

Opção: A

【Outra resolução】

Como $g(x) = f(x-2) + 1$, então tem-se:

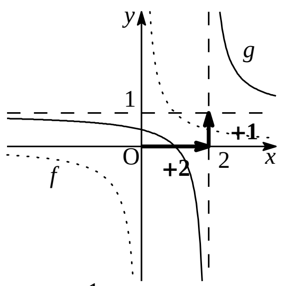
$$g(x) = \frac{1}{x-2} + 1 = \frac{1 + x - 2}{x-2} = \frac{x-1}{x-2}$$

Logo, a função $g(x)$ é homográfica.

Assim, a AV é: $x = -\dfrac{-2}{1} = 2$ e a AH é: $y = \dfrac{1}{1} = 1$.

Portanto, o gráfico que representa $g(x)$ é da opção A.

⟵ O gráfico da função $y = f(x-p) + q$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = f(x)$ através da translação de p unidades para direita e q unidades para cima.



⟵ $f(x-2) = \dfrac{1}{x-2}$

⟵ A **AV** e a **AH** do gráfico de uma função homográfica $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ são respecrtivamente $\boldsymbol{x = -\dfrac{d}{c}}$ e $\boldsymbol{y = \dfrac{a}{c}}$.

FIM

República de Moçambique

Matemática | **Ministério da Educação** | **2ª Época**
12ª Classe / 2010 | **Conselho Nacional de Exames, Certificação e Equivalências** | **120 Minutos**

Esta prova contém 40 perguntas com 4 alternativas de resposta para cada uma. Escolha a alternativa correcta e *RISQUE* a letra correspondente na sua folha de respostas. Responda a todas as primeiras 35 perguntas. As últimas 5 perguntas responda somente às da sua secção (Letras ou Ciências).

【Resolução】

1.

"*Todo o número natural não é negativo*" simbolicamente esta expressão corresponde a...

A. $\exists! x \in \mathbb{N} : x > 0$ B. $\forall x \in \mathbb{N} : x \geq 0$ C. $\exists x \in \mathbb{N} : x \leq 0$ D. $\forall x \in \mathbb{N} : x < 0$

2010. 2ª época

【Resolução】

A expressão "Todo o número natural não é negativo" simbolicamente corresponde a $\forall x \in \mathbb{N} : x \geq 0$

⟵ "Todo o número natural" corresponde a $\forall x \in \mathbb{N}$
"Não é negativo" corresponde a $x \nless 0$, ou seja, $x \geq 0$

Opção: B

2.

A operação lógica que associa duas proposições falsas numa nova proposição verdadeira chama-se...

A. Conjunção B. Disjunção inclusiva C. Equivalência D. Negação

2010. 2ª época

【Resolução】

Se p e q são duas operações falsas, então $p \Leftrightarrow q$ é verdadeira. Logo, a alternativa correcta é C.

⟵ $p \Leftrightarrow q$ somente é verdadeira se ambas as proposições p e q têm o mesmo valor lógico.

Opção: C

3.

A tabela refere-se a disjunção inclusiva.
Nestas condições os valores de x e y são respectivamente...

A. 0 e 0

B. 0 e 1

C. 1 e 0

D. 1 e 1

p	q	$p \vee q$
0	0	x
1	0	1
0	1	y
1	1	1

2010. 2ª época

【Resolução】

Pela leitura da tabela, conclui-se que 0 e 1 representam respectivamente falsa e verdadeira.
Como $F \vee F = F$, então o valor de x é 0.
Como $F \vee V = V$, então o valor de y é 1.

⟵ A proposição $p \vee q$ é falsa se e somente se ambas as proposições p e q são falsas.
Como $p \vee q$ na terceira linha é 1, então 1 deve corresponder a verdadeira.

Opção: B

4.

Considere as expressões $I = \dfrac{x^2-5}{10}$, $II = \dfrac{x^2-4x}{3x}$, $III = \sqrt{5}x$, $IV = \sqrt{x-x^3}$.
Qual das opções está <u>incorrecta</u>?

A. I e II são racionais fraccionárias B. I e III são racionais inteiras
C. IV é irracional D. II é racional fraccionária

2010. 2ª época

【Resolução】

Nota-se que:

I é racional inteira;

II é racional fraccionária;

III é racional inteira;

IV é irracional inteira.

Então a opção A está incorrecta.

Opção: A

⟵ Uma expressão diz-se expressão **racional inteira** quando não se indica uma divisão em que a variável fica no divisor e não aparece sob sinal de radical.

Uma expressão diz-se expressão **racional fraccionária** quando no divisor figura a variável.

Uma expressão diz-se expressão **irracional** quando, sob sinal de radical, figura a variável.

5.

Considerando como domínio da função $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}} - \sqrt[4]{x}$ o intervalo $[a; b]$. Qual é o valor de $a + b$?

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

2010. 2ª época

【Resolução】

As condições são:

$$\frac{1-x}{x+1} \geq 0 \cdots ① \ \wedge\ x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \cdots ② \ \wedge\ x \geq 0 \cdots ③$$

Resolve-se a inequação ①:

$$\frac{1-x}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1-x \leq 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x \geq -1 \\ x > -1 \end{cases} \vee \begin{cases} -x \leq -1 \\ x < -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x > -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 1 \\ x < -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 < x \leq 1 \ \vee\ x \in \emptyset$$

$$\Leftrightarrow -1 < x \leq 1 \cdots ①'$$

Calculando a interesecção de ①′, ② e ③, tem-se:

$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow x \in [0; 1]$

Como $a = 1$ e $b = 1$, então tem-se: $a + b = 2$

Opção: B

⟵ ★Se o índice n em $\sqrt[n]{x}$ é par, tem-se: $x \geq 0$

★Se o índice n em $\sqrt[n]{x}$ é ímpar, tem-se: $x \in \mathbb{R}$

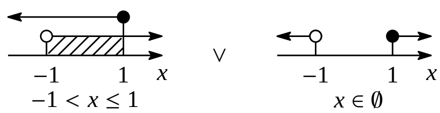
★O denominador é diferente de 0.

⟵ $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$

porque $\dfrac{+}{+} = +$ e $\dfrac{-}{-} = +$.

$\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

porque $\dfrac{+}{-} = -$ e $\dfrac{-}{+} = -$.

⟵ 

6.

O sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ \quad y+z=3 \\ \quad\quad 3z=6 \end{cases}$ tem solução $x; y; z$. Qual é o valor de $x + y + z$?

A. −3 B. −2 C. 1 D. 2

2010. 2ª época

【Resolução】

Seja $\begin{cases} x+y+z=1 \cdots ① \\ \quad y+z=3 \cdots ② \\ \quad\quad 3z=6 \Leftrightarrow z=2 \end{cases}$

Substituindo z por 2 na equação ②, tem-se: $y + 2 = 3 \Leftrightarrow y = 1$.

Substituindo z por 2 e y por 1 na equação ①, tem-se:

$x + 1 + 2 = 1 \Leftrightarrow x = -2$.

Portanto, tem-se: $x + y + z = -2 + 1 + 2 = 1$

Opção: C

【Outra resolução】

Calculando ① − ②, tem-se: $x = -2$

Substituindo x por −2 e z por 2 na equação ①, tem-se:

$-2 + y + 2 = 1 \Leftrightarrow y = 1$

Portanto, tem-se: $x + y + z = 1$

7.

Qual é a solução da inequação $\dfrac{2x-1}{x+3} > 0$?

A. $\left]-3; \dfrac{1}{2}\right[$ B. $]-3; 4[$ C. $]-\infty; -3[\cup]4; +\infty[$ D. $]-\infty; -3[\cup\left]\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$

2010. 2ª época

【Resolução】

$$\frac{2x-1}{x+3} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1>0 \\ x+3>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x-1<0 \\ x+3<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{1}{2} \\ x > -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x < \dfrac{1}{2} \\ x < -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{1}{2} \vee x < -3$$

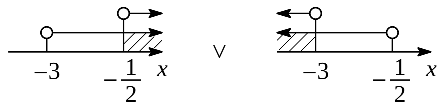
$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -3[\cup\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

Opção: D

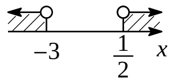
$\longleftarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases} \vee \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$

Porque $\dfrac{+}{+} = +$ e $\dfrac{-}{-} = +$.

$\longleftarrow$



$\longleftarrow$



8.

Quais são as raízes da equação $x^3 - 4x^2 - 5x = 0$?

A. $\{-5; -1; 0\}$ B. $\{-1; 0; 5\}$ C. $\{0; 1; 5\}$ D. $\{1; 2; 5\}$

2010. 2ª época

【Resolução】

$$x^3 - 4x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4x - 5) = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-5)(x+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5 \vee x = -1$$

Opção: B

$\longleftarrow$ Coloca-se em evidência o factor comum x.

$\longleftarrow$ Factoriza-se $x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1)$ aplicando $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$.

9.

Qual é a expressão equivalente a $\dfrac{\text{sen}x}{1-\text{sen}x} + \dfrac{\text{sen}x}{1+\text{sen}x}$?

A. $\dfrac{2\text{tg}x}{\text{sen}x}$ B. $\dfrac{2\text{cotg}x}{\cos x}$ C. $\dfrac{2\text{cotgx}}{\text{sen}x}$ D. $\dfrac{2\text{tg}x}{\cos x}$

2010. 2ª época

【Resolução】

$$\frac{\text{sen}x}{1-\text{sen}x} + \frac{\text{sen}x}{1+\text{sen}x} = \frac{\text{sen}x(1+\text{sen}x) + \text{sen}x(1-\text{sen}x)}{(1-\text{sen}x)(1+\text{sen}x)}$$

$$= \frac{\text{sen}x + \text{sen}^2x + \text{sen}x - \text{sen}^2x}{\mathbf{1 - sen^2}\boldsymbol{x}}$$

$$= \frac{2\text{sen}x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{2\mathbf{sen}\boldsymbol{x}}{\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x} \cdot \cos x}$$

$$= \frac{2\mathbf{tg}\boldsymbol{x}}{\cos x}$$

Opção: D

$\longleftarrow$ $m.m.c$ $(1-\text{sen}x, 1+\text{sen}x) = (1-\text{sen}x)(1+\text{sen}x)$.

$\longleftarrow$ $(1-\text{sen}x)(1+\text{sen}x) = 1 - \text{sen}^2x$ porque $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$\longleftarrow$ $\text{sen}^2x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow 1 - \text{sen}^2x = \cos^2 x$

$\longleftarrow$ $\cos^2 x = \cos x \cdot \cos x$

$\longleftarrow$ $\dfrac{\text{sen}x}{\cos x} = \text{tg}x$

10.

Simplificando a expressão $\dfrac{x}{|x|}$ tem-se...

A. -1 B. -1 ou 1 C. 1 D. $[-1; 1]$

2010. 2ª época

【Resolução】

Como o denominador é diferente de zero, tem-se a condição:

$$|x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Então, tem-se:

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x} & \text{se } x > 0 \\ \frac{x}{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Opção: B

⟵ **Definição de módulo**: $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

11.

A expressão $|5x - 10| - x + 2$ é equivalente a $4x - 8$ se...

A. $x < 2$ B. $x \leq 2$ C. $x > 2$ D. $x \geq 2$

2010. 2ª época

【Resolução】

$|5x - 10| - x + 2 = 4x - 8 \Leftrightarrow |5x - 10| = 5x - 10.$

Para que seja verdadeira esta igualdade, é necessário que se verifique a condição:

$$5x - 10 \geq 0 \Leftrightarrow 5x \geq 10 \Leftrightarrow x \geq 2$$

Opção: D

⟵ **Definição de módulo**: $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

⟵ Para que $|x| = x$, é necessário que o número que está no dentro do módulo seja maior ou igual a zero, isto é, $x \geq 0$.

12.

Na equação $(n + 1)! = n!$, qual é o valor de n?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2010. 2ª época

【Resolução】

Dividindo por $n!$ ambos os membros da equação, tem-se:

$$\frac{(n+1)!}{n!} = 1 \Leftrightarrow \frac{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} = 1$$
$$\Leftrightarrow n + 1 = 1 \Leftrightarrow n = 0$$

Opção: A

⟵ $(n+1)! = (n+1)\underbrace{n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}_{n!} = (n+1) \cdot n!$

13.

Qual é o número representado por $P_2 \cdot C_5^3$?

A. 20 B. 30 C. 60 D. 120

2010. 2ª época

【Resolução】

$$P_2 \cdot C_5^3 = 2! \cdot \frac{A_5^3}{3!} = \cancel{2} \cdot 1 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 20$$

Opção: A

$\star P_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$

$\star C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}^{p \text{ factores}}}{p(p-1)3\cdots 2 \cdot 1}$

14.

Os números de telefones de uma cidade são uma sequência de três dígitos diferentes e em nenhum deles entra o algarismo zero. Quantos telefones tem a cidade?

A. 120 B. 151 C. 504 D. 630

2010. 2ª época

【Resolução】

Deseja-se o número total de escolher três algarismos dentre 9 algarismos (de 1 a 9) e permutar os três algarismos entre si. Como interessa a ordem, trata-se de um arranjo de 9 elementos tomados 3 a 3, isto é: $A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$

Opção: C

⟵ A_n^p é o número total das maneiras diferentes possíveis de escolher p elementos dentre n elementos e permutar os p elementos entre si. Se interessa a ordem, então trata-se de um arranju A_n^p.

$$A_n^p = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}_{p\text{factores}}$$

15.

Uma urna tem 10 bolas idênticas, enumeradas de 1 a 10. Se retirarmos ao acaso uma bola da urna, qual é a probabilidade de não obtermos a bola de número 7?

A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{9}{10}$

2010. 2ª época

【Resolução】

O número de casos possíveis é C_{10}^1 porque retira-se ao acaso uma bola dentre 10 bolas, isto é uma combinação de 10 elementos, tomados 1 a 1.

O número de casos favoráveis é C_9^1 porque retira-se ao acaso uma bola dentre 9 bolas (excepto a bola de número 7), isto é uma combinação de 9 elementos, tomados 1 a 1.

Então a probabilidade pedida é: $\frac{C_9^1}{C_{10}^1} = \frac{9}{10}$

Opção: D

⟵ $\mathbf{C_n^p}$ é o número total das maneiras possíveis de **escolher** p elementos dentre n elementos. Se não interessa a ordem, então trata-se uma combinação C_n^p.

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}^{p \text{ factores}}}{p(p-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$

Caso especial: $C_n^1 = n$

⟵ A probabilidade de um acontecimento A é dada por:

P(A)= $\dfrac{\textbf{número de casos favoráveis}}{\textbf{número de casos possíveis}}$

16.

Qual é o termo geral da sucessão 3; 7; 11; 15; ...?

A. $4-n$ B. $n+2$ C. $4n-1$ D. $2n+1$

2010. 2ª época

【Resolução】

Como a diferença entre dois termos consecutivos é constante 4, esta sucessão é uma PA em que $a_1 = 3$ e $d = 4$.

Logo, o termo geral desta PA é: $a_n = 3 + (n-1)4 = 4n - 1$

Opção: C

⟵ 3, 7, 11, 15, . . .

+4 +4 +4 +4

⟵ O termo geral de uma PA é: $a_n = a_1 + (n-1)d$

O termo geral de uma PG é: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

17.

Qual destas sucessões é infinitamente pequena?

A. $-\frac{2}{1+\sqrt{n}}$ B. $\frac{3n^2+1}{n^2}$ C. $\frac{n^2}{3n}$ D. $\frac{5^n}{3}$

2010. 2ª época

【Resolução】

Calcula-se o limite de cada sucessão das opções dadas:

A. $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{2}{1+\sqrt{n}} = 0$ ⟵ $-\frac{2}{\infty} = 0$

B. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^2+1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \frac{1}{n^2} = 3$ ⟵ $\frac{1}{\infty} = 0$

C. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{3n} = \frac{n}{3} = +\infty$ ⟵ $\frac{\infty}{3} = \infty$

D. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5^n}{3} = +\infty$ ⟵ Como 5 > 1, então $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$. Logo $\frac{\infty}{3} = \infty$

Como o limite da sucessão da opção A é igual a zero, a sucessão da opção A é infinitamente pequena.

Opção: A

⟵ Diz-se que uma sucessão a_n é infinitamente pequena se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Diz-se que uma sucessão a_n é infinitamente grande se: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

18.

Qual é o valor de $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$?

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

2010. 2ª época

【Resolução】

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$ é a soma de todos os termos de uma PG em que $q=\frac{1}{2}$.

Como $|q|<1$, aplicadno a fórmula da soma de todos os termos de uma PG, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

⟵ A soma de todos os termos de uma PG de $|q|<1$ é dada por $S=\frac{a_1}{1-q}$

De igual modo, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$$

⟵ Soma de todos os termos de uma PG em que $a_1=1$ e $q=\frac{1}{3}$.

Portanto, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{3^n}}=\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$$

⟵ $\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{2\cdot 2}{\frac{3}{2}\cdot 2}=\frac{4}{3}$

Opção: C

19.

No primeiro dia de um mês, uma capoeira produziu 3 ovos, no segundo dia 9 ovos, no terceiro dia 27 ovos e assim em diante. No dia em que produziu 729 ovos começou a comercialização. Em que dia do mês começou a comercialização?

A. 4° dia B. 5° dia C. 6° dia D. 7° dia

2010. 2ª época

【Resolução】

A producão dos ovos na capoeira representa-se pela seguinte sucessão: $3; 9; 27; \cdots ; 729$

Esta é uma PG em que $a_1=3$ e $q=3$.

Logo, o termo geral desta PG é:

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=3\cdot 3^{n-1}=3^n$$

Para se obter o dia em que a capoeira produziu 729 ovos, resolve-se $a_n=729$:

$$a_n=729 \Leftrightarrow 3^n=729 \Leftrightarrow 3^n=3^6 \Leftrightarrow n=6$$

Opção: C

⟵ $3, \underset{\times 3}{\frown} 9, \underset{\times 3}{\frown} 27, \underset{\times 3}{\frown} \ldots$

⟵ O termo geral de uma PG é dada por: $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$.

⟵ $a^p=a^q \Leftrightarrow p=q$

20.

De uma progressão aritmética sabe-se que $a_1=-2$ e $a_8=19$. Qual é a soma dos primeiros oito termos?

A. 86 B. 68 C. 58 D. 56

2010. 2ª época

【Resolução】

$$S_8=\frac{n(a_1+a_8)}{2}=\frac{8(-2+19)}{2}=68$$

Opção: B

⟵ A soma dos n primeiros termos de uma PA é dada por: $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ ou $S_n=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$

21.

O gráfico da função $y=-2x^2+bx+c$ passa pelo ponto $(1;0)$ e tem como vértice o ponto $(3;s)$. Qual é o valor de s?

A. -5 B. 4 C. 8 D. 18

2010. 2ª época

【**Resolução**】

Como o gráfico passa pelo ponto (1; 0), tem-se:

$$0 = -2 \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \Leftrightarrow b + c = 2 \cdots ①$$

⟵ Substitui-se $x = 1$ e $y = 0$ em $y = -2x^2 + bx + c$.

Faz-se o quadrado perfeito de $y = -2x^2 + bx + c$.

$$y = -2x^2 + bx + c = -2\left(x^2 - \frac{b}{2}x\right) + c$$

⟵ Evidencia-se −2, coeficiente de x^2, em $-2x^2 + bx + c$.

$$= -2\left[\left(x - \frac{b}{4}\right)^2 - \frac{b^2}{16}\right] + c$$

⟵ Faz-se o quadrado perfeito.

$$= -2\left(x - \frac{b}{4}\right)^2 + \frac{b^2}{8} + c$$

⟵ Desembaraça-se de parenteses rectos.

Portanto, as coordenadas do vértice são $\left(\frac{b}{4}; \frac{b^2}{8} + c\right)$.

⟵ As coordenadas do vértice do gráfico da função $y = a(x - p)^2 + q$ são $(p; q)$.

Logo, tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{b}{4} = 3 \Leftrightarrow b = 12 \cdots ② \\ \dfrac{b^2}{8} + c = s \cdots ③ \end{cases}$$

Substituindo ② em ①, tem-se: $12 + c = 2 \Leftrightarrow c = -10 \cdots ④$

Substituindo ② e ④ em ③, tem-se:

$$\frac{12^2}{8} - 10 = s \Leftrightarrow s = \frac{144 - 80}{8} \Leftrightarrow s = 8$$

Opção: C

【**Outra resolução**】

De igual modo, obtém-se a equação $b + c = 2 \cdots ①$

Calcula-se: $\Delta = b^2 - 4 \cdot (-2) \cdot c = b^2 + 8c$

Por isso, as coordenadas do vértice são:

$$\left(\frac{-b}{2 \cdot (-2)}; -\frac{b^2 + 8c}{4 \cdot (-2)}\right) = \left(\frac{b}{4}; \frac{b^2}{8} + c\right)$$

⟵ As coordenadas do vértice de uma função quadrática $y = a^2 + bx + c$ são $\left(\frac{-b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Logo, tem-se o seguinte sistema:

Continua-se de mesmo modo que a resolução$\cdots\cdots\cdots\cdots$

22.

Quais são os zeros da função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x \le 0 \\ -4 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

A. −4 e −2 B. −2 C. 2 D. −2 e 2

2010. 2ª época

【**Resolução**】

Resolve-se a equação $x^2 - 4 = 0$ com $x \le 0$.

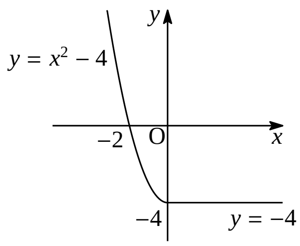
$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Mas como $x \le 0$, somente $x = -2$ é o zero.

Quando $x > 0$, $f(x) = -4$ não tem zeros.

Logo, a função tem apenas um zero, $x = -2$.

Opção: B



23.

Considere as funções $f(x) = x^2 - 4$; $g(x) = 2^x$; $m(x) = \dfrac{x}{x - 1}$ e $n(x) = \text{sen}x$.

Quais das funções NÃO são injectivas?

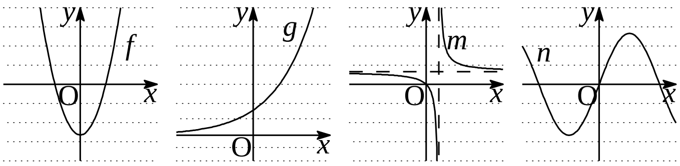
A. f e g B. f e m C. g e n D. f e n

2010. 2ª época

【Resolução】

Como g é uma função exponencial e m é uma função homográfica, então g e m são funções injectivas porque nenhuma recta horizontal corta os gráficos em mais de um ponto. Como f é uma função quadrática e n é uma função seno, então f e n não são injectivas porque algumas rectas horizontais cortam os gráficos em mais de um ponto.

Os gráficos das funções f, g, m e n são representados como se segue:



Opção: D

⟵ ★Se nenhuma recta horizontal corta o gráfico de f em mais um ponto, então f é injectiva.

★Se toda recta horizontal corta o gráfico de f, então f é sobrejectiva.

★Se toda recta corta o gráfico de f em um sóponto, então f é bijectiva.
(Se uma função f é simultaneamente injectiva e sobrejectiva, f é bijectiva.)

24.

Considere as funções $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = x + 2$. Quantas soluções tem a equação $f(x) = g(x)$?

A. Nenhuma B. Uma C. Duas D. Três

2010. 2ª época

【Resolução】

Como $f(x) = g(x)$, então tem-se a equação quadrática:

$$x^2 - 4 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

Calcula-se o discriminante Δ da equação:

$$\Delta = (-1)^2 - 1 \cdot (-6) = 7$$

Como $\Delta > 0$, a equação $f(x) = g(x)$ tem duas soluções.

Opção: C

⟵ Se Δ é o discriminante de uma equação $ax^2 + bx + c = 0$, então $\Delta = b^2 - 4ac$.

⟵ Se $\Delta > 0$, a equação tem duas soluções.
Se $\Delta = 0$, a equação tem uma única solução.
Se $\Delta < 0$, a equação não tem nenhuma solução.

25.

Considere a função $f(x) = \cos|x| + 3$. Qual é o contradomínio da função?

A. $[-3; 3]$ B. $[-1; 1]$ C. $[0; 3]$ D. $[2; 4]$

2010. 2ª época

【Resolução】

Como $\cos(-x) = \cos x$, então $\cos|x| = \cos x$.

Sabe-se que: $-1 \le \cos x \le 1$

Então, tem-se:

$$\Leftrightarrow -1 \le \cos|x| \le 1$$
$$\Leftrightarrow -1 + 3 \le \cos|x| + 3 \le 1 + 3$$
$$\Leftrightarrow 2 \le f(x) \le 4$$

Por isso, o contra domínio da função $f(x) = \cos|x| + 3$ é $[2; 4]$.

Opção: D

⟵ $\cos|x| = \begin{cases} \cos x \ (x \ge 0) \\ \cos(-x) \ (x < 0) \end{cases} = \begin{cases} \cos x \ (x \ge 0) \\ \cos x \ (x < 0) \end{cases} = \cos x$

⟵ $\cos x = \cos|x|$

⟵ Adiciona-se 3 a todos os membros da inequação.

Contradomínio de funções trigonométricas:

★ $-1 \le \operatorname{sen} f(x) \le 1$; ★ $-1 \le \cos f(x) \le 1$;

★ $-\infty \le \operatorname{tg} x \le +\infty$

26.

Qual das seguintes funções tem como período $p = 4\pi$ e contradomínio $I = [-2; 6]$?

A. $f(x) = 2 + 3\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ B. $f(x) = 2 - 4\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$

C. $f(x) = 2 + 4\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{4}\right)$ D. $f(x) = -1 - 2\operatorname{cotg}\left(\dfrac{x}{4}\right)$

2010. 2ª época

【Resolução】

A. O período é $\dfrac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$ e o contradomínio é $[-1;5]$ porque:

$$-1 \le \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \le 1 \Leftrightarrow -3 \le 3\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \le 3$$

$$\Leftrightarrow -1 \le 2 + 3\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \le 5 \Leftrightarrow -1 \le f(x) \le 5$$

B. O período é $\dfrac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$ e o contradomínio é $[-2;6]$ porque:

$$-1 \le \cos\left(\frac{x}{2}\right) \le 1 \Leftrightarrow 4 \ge \cos\left(\frac{x}{2}\right) \ge -4$$

$$-2 \le 2 - 4\cos\left(\frac{x}{2}\right) \le 6 \Leftrightarrow -2 \le f(x) \le 6$$

C. O período é $\dfrac{\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|} = 4\pi$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$.

D. O período é $\dfrac{\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|} = 4\pi$ e o seu contradomínio é $\mathbb{R}$.

Opção: B

⟵ O período de $y = \operatorname{sen}kx$ é $\dfrac{2\pi}{|k|}$.

⟵ O contradomínio de $y = \operatorname{sen}kx$ é $[-1;1]$, ou seja, $-1 \le \operatorname{sen}kx \le 1$. Multiplica-se por 3 a todos os menbros.

⟵ Adicona-se 2 a todos os memros.

⟵ O período de $y = \cos kx$ é $\dfrac{2\pi}{|k|}$.

⟵ O contradomínio de $y = \cos kx$ é $[-1;1]$, ou seja, $-1 \le \cos kx \le 1$. Multiplica-se por -4.

⟵ Adicona-se 2 a todos os memros.

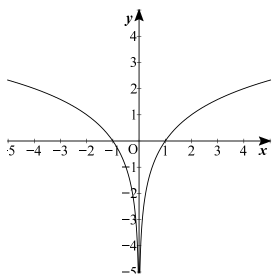
⟵ O periodo de $y = \operatorname{tg}kx$ é $\dfrac{\pi}{|k|}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$.

⟵ O periodo de $y = \operatorname{cotg}kx$ é $\dfrac{\pi}{|k|}$ e o seu contradomínio é $\mathbb{R}$.

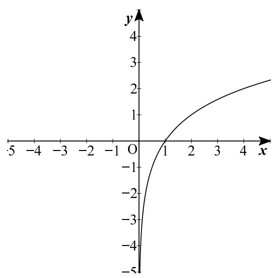
27.

Qual dos gráficos representa a função $y = \log_2|x|$?

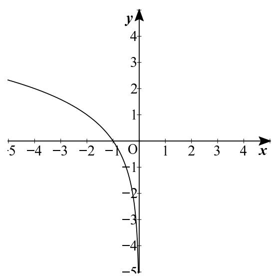
A.



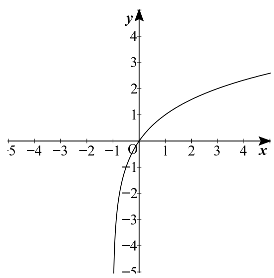
B.



C.



D.



2010. 2ª época

【Resolução】

O gráfico da função $y = \log_2 x$ é da opção B. O gráfico da função $y = \log_2|x|$ é da opção A porque o gráfico da função $y = \log_2|x|$ obtém-se a partir do gráfico de $y = \log_2 x$ através da simetria em relação ao eixo dos yy, representando os pontos que estão à direita do eixo dos yy à esquerda do mesmo eixo.

Opção: A

⟵ O gráfico de uma função $y = f(|x|)$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = f(x)$ através da simetria em relação ao eixo dos yy, representando os pontos que estão à direita do eixo dos yy à esquerda do mesmo eixo.

28.

Quais são os pontos de descontinuidade do gráfico da função $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$?

A. -3 e -2 B. -3 e 2 C. -2 e 3 D. 2 e 3

2010. 2ª época

【Resolução】

Como o denominador é diferente de zero, tem-se a condição:

$$x^2 - 5x + 6 \ne 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-2) \ne 0 \Leftrightarrow x \ne 3 \land x \ne 2$$

Logo, nota-se que a função não está definida para $x = 2$ e $x = 3$, isto é, $\nexists f(2)$ e $\nexists f(3)$.

Como $\nexists f(2)$ e $\nexists f(3)$, não se pode dizer que $\lim\limits_{x\to 2} f(2) = f(2)$ e $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$.

Portanto $x = 2$ e $x = 3$ são os pontos de descontinuidade.

Opção: D

⟵ Factoriza-se $x^2 - 5x + 6$ aplicando $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

⟵ Diz-se que uma função f é contínua num ponto a se e só se $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Diz-se que uma função f é descontínua num ponto a se a função f não é contínua nesse ponto.

29.

Sabendo que a função $f(x) = \begin{cases} 2x+1, \text{ se } x \geq 4 \\ kx-3, \text{ se } x < 4 \end{cases}$ é contínua em $x = 4$, qual é o valor de k?

A. 9 B. 3 C. $\frac{3}{2}$ D. -9

2010. 2ª época

【**Resolução**】

Para que seja contínua em $x = 4$, é necessário que:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4).$$

O limite lateral à esquerda de $x = 4$ é:

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} (kx-3) = k\cdot 4 - 3 = 4k - 3$$

O limite lateral à direita de $x = 4$ é:

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} (2x+1) = 2\cdot 4 + 1 = 9$$

O valor da função no ponto $x = 4$ é:

$$f(4) = 2\cdot 4 + 1 = 9$$

Como estes são iguais, tem-se:

$$4k - 3 = 9 \Leftrightarrow 4k = 12 \Leftrightarrow k = 3$$

Opção: B

⟵ Diz-se que uma função f é contínua num ponto a se e só se $\exists \lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, ou seja, $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

⟵ Quando $x \to 4^-$, isso é, $x < 4$, $f(x) = kx - 3$.

⟵ Quando $x \to 4^+$, isso é, $x > 4$, $f(x) = 2x + 1$.

⟵ Quando $x = 4$, $f(x) = 2x + 1$.

30.

Qual é o valor de $\lim_{x\to +\infty} \left(1 - \frac{\pi}{x}\right)^{4x}$?

A. $e^{-4\pi}$ B. 1 C. e^4 D. $e^{4\pi}$

2010. 2ª época

【**Resolução**】

$$\lim_{x\to +\infty} \left(1 - \frac{\pi}{x}\right)^{4x} = [1^\infty]$$
$$= e^{\lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{\pi}{x} - 1\right)\cdot 4x}$$
$$= e^{\lim_{x\to\infty} -4\pi} = e^{-4\pi}$$

Opção: A

⟵ Para levantar a indeterminação do tipo 1^∞, utiliza-se a seguinte fórmula:

Sejam $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$. Então tem-se:

$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = [1^\infty] = e^{\lim_{x\to a}[f(x)-1]\cdot g(x)}$, onde e chama-se número de Nepper; tal que $e = 2,7183\cdots$

31.

Qual é o valor de $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}$?

A. $-\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 1

2010. 2ª época

【**Resolução**】

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{3x^2(\cos x + 1)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{\cos^2 x - 1}}{3x^2(\cos x + 1)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\mathbf{-sen^2 x}}{3x^2(\cos x + 1)}$$
$$= \mathbf{\lim_{x\to 0}} \left[-\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\mathbf{sen x}}{\mathbf{x}}\right)^{\mathbf{2}} \cdot \frac{1}{\cos x + 1}\right]$$
$$= -\frac{1}{3} \cdot \mathbf{1^2} \cdot \frac{1}{1+1} = -\frac{1}{6}$$

Opção: A

⟵ Multiplica-se pelo conjugado $\cos x + 1$ de $\cos x - 1$ o numerador e o denominador.

⟵ $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

⟵ Como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, então $\mathbf{\cos^2 x - 1 = -sen^2 x}$

⟵ $\frac{\text{sen}^2 x}{x^2} = \left(\frac{\text{sen}x}{x}\right)^2$

⟵ **Limite notável**: $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1$

$\cos 0 = 1$

32.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^3-27}$?

A. 0　　B. $\dfrac{5}{54}$　　C. $\dfrac{5}{27}$　　D. ∞

2010. 2ª época

【Resolução】

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x^3-27}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(\cancel{x-3})(x+2)}{(\cancel{x-3})(x^2+3x+9)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{x^2+3x+9}$$
$$=\frac{3+2}{3^2+3\cdot 3+9}=\frac{5}{27}$$

Opção: C

⟵ Factoriza-se o numerador e o denominador aplicando respectivamente:
$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$;
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

⟵ Substitui-se x por 3.

33.

Considere a função $f(x)=x^2+3x$ derivável em $x=2$. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$?

A. 0　　B. 3　　C. 6　　D. 7

2010. 2ª época

【Resolução】

Pela definição de derivada num ponto, tem-se:
$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$
Como $f'(x)=2x+3$, então $f'(2)=2\cdot 2+3=7$.

Por isso, tem-se: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=7$

Opção: D

⟵ **Definição de derivada num ponto**:
A derivada de uma função f em $x=a$ é dada por:
$f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
ou
$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

【Outra resolução】

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\boldsymbol{x^2+3x-10}}{x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+5)(\cancel{x-2})}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2}(x+5)=7$$

⟵ Como $f(2)=2^2+3\cdot 2=10$, substitui-se $f(2)$ por 10.

34.

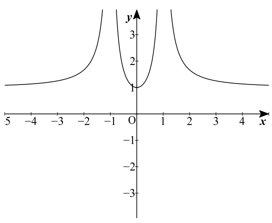
Pela leitura do gráfico, qual é a solução da equação $g'(x)=0$?

A. $x\in\{\ \}$

B. $x=-1$

C. $x=0$

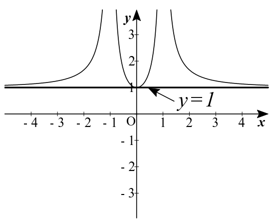
D. $x=1$



2010. 2ª época

【Resolução】

Pela leitura do gráfico, a recta tangente ao gráfico de g em $x=0$ é uma função constante $y=1$.
Como o declive da recta $y=1$ é 0, tem-se: $g'(0)=0$
Logo, a solução de $g'(x)=0$ é $x=0$.



Opção: C

⟵ ★O declive de toda função constante é zero.
★$g'(a)$ é igual ao declive da recta tangente ao gráfico da função $y=g(x)$ em $x=a$

35.

Um corpo move-se ao longo de um eixo horizontal orientado positivamente da esquerda para direita de acordo com a equação $e(t) = -t^3 - 9t^2 + 24t + 1$. Qual é a aceleração no instante $t = 1\text{s}$?

A. -24m/s^2 B. -12m/s^2 C. -10m/s^2 D. -9m/s^2

2010. 2ª época

【**Resolução**】

A velocidade do corpo no instante t é:

$$e'(t) = -3t^2 - 9 \cdot 2t + 24 \cdot 1 = -3t^2 - 18t + 24$$

Logo, a aceleração do corpo no instante t é:

$$e''(t) = -3 \cdot 2t - 18 \cdot 1 = -6t - 18$$

Portanto, a aceleração do corpo no instante $t = 1\text{s}$ é:

$$e''(1) = -6 - 18 \cdot 1 = -24$$

Opção: A

⟵ Se e é a posição de um ponto P que se move horizontamente na hora t e apresentado por $\boldsymbol{e = f(t)}$, então a velocidade $\boldsymbol{v}$ e aceleração $\boldsymbol{a}$ do ponto P na hora t são respectivamente $\boldsymbol{v = f'(t)}$ e $\boldsymbol{a = f''(t)}$.

Somente para a Secção de Letras

36.

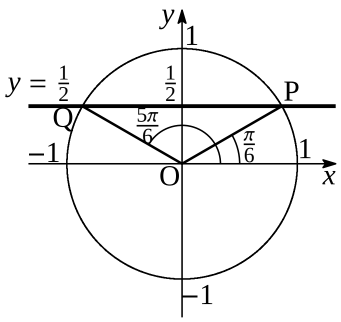
Qual é o conjunto solução da equação $2\text{sen}x - 1 = 0$ $(0 < x < 2\pi)$?

A. $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$ B. $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$ C. $\left\{\frac{5\pi}{6}\right\}$ D. $\left\{\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$

2010. 2ª época

【**Resolução**】

$2\text{sen}x - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{sen}x = \frac{1}{2}$



Sejam P e Q os dois pontos das intersecções da recta $y = \frac{1}{2}$ com o círculo trigonométrico.

Como os ângulos procurados x são os ângulos formados pelo segmento OP com o eixo das abcissas no sentido positivo e pelo segmento OQ com o eixo das abcissas no sentido positivo, tem-se $x = \frac{\pi}{6}$ e $x = \frac{5\pi}{6}$.

Então o conjunto solução é B.

Opção: B

⟵ A solução da equação $\textbf{sen}\theta = \alpha$ é o ângulo formado pelo segmento OP com o eixo das abcissas no sentido positivo, onde P é o ponto da intersecção da recta $\boldsymbol{y} = \alpha$ com o círculo trigonométrico.

A solução da equação $\textbf{cos}\theta = \alpha$ é o ângulo formado pelo segmento OP com o eixo das abcissas no sentido positivo, onde P é o ponto da intersecção da recta $\boldsymbol{x} = \alpha$ com o círculo trigonométrico.

37.

Simplificando a expressão $P \cap (Q \cap \overline{P})$ teremos...

A. $\emptyset$ B. P C. Q D. Universo

2010. 2ª época

【**Resolução**】

$$\begin{aligned} P \cap (Q \cap \overline{P}) &= P \cap (\overline{P} \cap Q) \\ &= (P \cap \overline{P}) \cap Q \\ &= \emptyset \cap Q \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Opção: A

⟵ **Propriedade comutativa:** $A \cap B = B \cap A$

⟵ **Propriedade associativa**: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

⟵ $A \cap \overline{A} = \emptyset$ porque A e $\overline{A}$ são conjuntos disjuntos.

⟵ $\emptyset \cap A = \emptyset$

38.

Se $M = \{1; 3; 7; 19\}$, $N = \{x \in \mathbb{N} : x - 5 = 2\}$ e $P = \{x \in \mathbb{R} : 5 < x < 8\}$. A que é igual $(M \cap P) \cap N$?

A. $\{7\}$ B. $\{3; 7\}$ C. $\{6; 7\}$ D. $\{3; 5; 7\}$

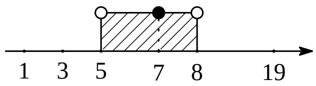
2010. 2ª época

【**Resolução**】

$N = \{x \in \mathbb{N} : x - 5 = 2\} = \{x \in \mathbb{N} : x = 7\} = \{7\}$

A interesecção de M com P é $M \cap P = \{7\}$. ⟵

Logo, $(M \cap P) \cap N = \{7\} \cap \{7\} = \{7\}$.



Opção: A

39.

Se $E = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \geq 0\}$ e $F = [0, 5[$, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A. $E \cap F = [1, 5]$ B. $E \setminus F = [0, 1]$ C. $E \cup F = [1, +\infty[$ D. $\overline{F} =]-\infty, 0[\cup[5, +\infty[$

2010. 2ª época

【**Resolução**】

$E = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} = [1; +\infty[$

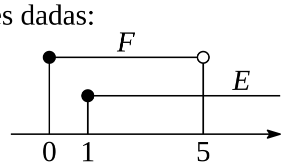
Determina-se cada intervalo das opções dadas:

A. $E \cap F = [1; 5[$ ⟵ E interesecção com F.

B. $E \setminus F = [5; +\infty[$ ⟵ E menos F.

C. $E \cup F = [0; +\infty[$ ⟵ E união com F.

D. $\overline{F} =]-\infty; 0[\cup[5; +\infty[$ ⟵ Complementar do conjunto F.



Logo, a afirmação da opção D é verdadeira.

Opção: D

40.

Numa loja onde vendem óleo e batata entram em média diária 300 clientes dos quais 120 compram batata, 150 óleo e 80 compram as duas coisas. Quantos clientes entram na loja e não compram nada?

A. 100 B. 110 C. 120 D. 130

2010. 2ª época

【**Resolução**】

Sejam:

U- Conjunto dos clientes que entram na loja

B- Conjuntos dos clientes que compram batata

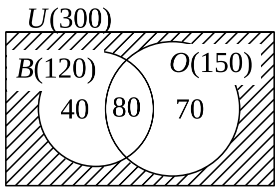
O- Conjuntos dos clientes que compraram óleo.

⟵ Nota-se que:
$n(U) = 300$, $n(B) = 120$, $n(O) = 150$ e $n(B \cap M) = 80$.

Os clientes que compram só batata são $120 - 80 = 40$.
Os clientes que compraram só óleo são $150 - 80 = 70$.

Então pode-se construir o diagrama de Venn como a figura mostra.

Pela figura, os clientes que entram na loja e não compram nada são: $300 - (40 + 80 + 70) = 110$



Opção: B

Somente para a Secção de Ciências

36.
A distância entre os pontos P(2; −2) e Q(−1; y) é de cinco unidades. Qual é o valor de y?

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

2010. 2ª época

【Resolução】

Pela condição, tem-se $\overline{PQ} = 5$. Por isso:

$$\sqrt{(-1-2)^2 + [y-(-2)]^2} = 5 \Leftrightarrow (-3)^2 + (y+2)^2 = 5^2$$
$$\Leftrightarrow 9 + y^2 + 4y + 4 - 25 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 4y - 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow (y+6)(y-2) = 0 \Leftrightarrow y = -6 \vee y = 2$$

Então, a solução é a opção C.

Opção: C

⟵ A distância entre os pontos $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ é $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

⟵ Factoriza-se $y^2 + 4y - 12$ aplicando $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$.

37.
A recta $-x + 2y + 3 = 0$ é perpendicular à recta $y = mx; m \in \mathbb{R}$. Qual é o valor de m?

A. 0,5 B. −0,5 C. −1 D. −2

2010. 2ª época

【Resolução】

$$-x + 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow 2y = x - 3 \Leftrightarrow y = \mathbf{\frac{1}{2}}x - \frac{3}{2}$$

Então, o declive da recta é $\mathbf{\frac{1}{2}}$.

Como esta recta é perpendicular à recta $y = mx$, então é necessário que: $\frac{1}{2} \cdot m = -1 \Leftrightarrow m = -2$

Opção: D

⟵ O declive da recta $y = \boldsymbol{a}x + b$ é $\boldsymbol{a}$.

⟵ Se duas rectas $y = a_1x + b_1$ e $y = a_2x + b_2$ são perpendiculares entre si, então o produto dos seus declives é igual a −1, isto é, $a_1 \cdot a_2 = -1$.

38.
Qual é a distância do ponto P(2; 5) à recta de equação $3x - 4y = 6$?

A. 0 B. 1 C. 3 D. 4

2010. 2ª época

【Resolução】

$3x - 4y = 6 \Leftrightarrow 3x - 4y - 6 = 0$

Então, a distância, d, do ponto (2; 5) à recta $3x - 4y - 6 = 0$ é dada por: $d = \dfrac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 5 - 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{|-20|}{\sqrt{25}} = \dfrac{20}{5} = 4.$

Opção: D

⟵ A distância, d, do ponto $(x_1; y_1)$ à recta de equação $ax + by + c = 0$ é dada por: $d = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

39.
Qual é a inversa da função $f(x) = \log_3(x+3)$?

A. $f^{-1}(x) = 3^x - 3$ B. $f^{-1}(x) = 3^x + 2$ C. $f^{-1}(x) = 3^{x+1}$ D. $f^{-1}(x) = 3^{x-2}$

2010. 2ª época

【Resolução】

Substituindo $f(x)$ por y, tem-se: $y = \log_3(x+3)$.

Resolve-se $y = \log_3(x+3)$ em ordem a x:

$$\log_3(x+3) = y \Leftrightarrow \log_3(x+3) = \log_3 3^y$$
$$\Leftrightarrow x + 3 = 3^y$$
$$\Leftrightarrow x = 3^y - 3$$

Trocando as variáveis x por y e y por x, tem-se: $y = 3^x - 3$, que é a função inversa pedida, $f^{-1}(x) = 3^x - 3$.

Opção: A

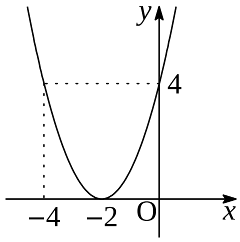
⟵ Adopta-se $\log_3$ no o segundo membro. $y = \log_3 3^y$

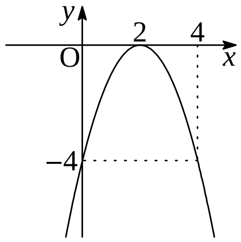
⟵ Como as bases dos dois membros são iguais, iguala-se os logaritmandos.

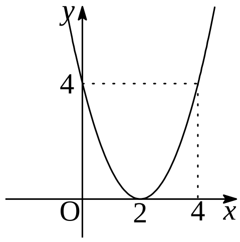
⟵ A função inversa de uma função logarítmica é uma função exponencial.

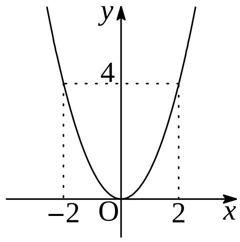
40.

Sendo $f(x) = x^2 - 1$, para $-2 \leq x \leq 2$. Qual é o gráfico que representa $g(x) = f(x-2)+1$?

A. 

B. 

C. 

D. 

2010. 2ª época

【**Resolução**】

Determina-se $g(x)$:

$$g(x) = \boldsymbol{f(x-2)} + 1 = \boldsymbol{(x-2)^2 - 1} + 1 = (x-2)^2$$

⟵ Calcula-se $f(x-2)$ substituindo x por $x-2$ em $f(x) = x^2 - 1$.

Então, o gráfico da função $g(x) = (x-2)^2 = (x - \mathbf{2})^2 + \mathbf{0}$ tem o vertice $(\mathbf{2}; \mathbf{0})$ e a concavidade virada para cima porque o coeficiente de x^2 é positivo.

⟵ O gráfico de uma função quadrática, $y = a(x - \boldsymbol{p})^2 + \boldsymbol{q}$, é uma parábola e tem o vértice $(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{q})$. Se $a > 0$ a parábola tem a concavidade virada para cima e se $a < 0$, a parábola tem a concavidade virada para baixo.

Por isso, conclui-se que o gráfico da função $g(x)$ é da opção C.

Opção: C

【**Outra resolução**】

O gráfico de $g(x) = f(x - \mathbf{2}) + \mathbf{1}$ obtém-se a partir do gráfico de $f(x)$ através da translação de **2** unidades para direita e **1** unidade para cima.

⟵ O gráfico de $y = f(x-p)+q$ obtém-se a partir do gráfico de $y = f(x)$ através de uma translação de p unidades para direita e q unidades para cima.

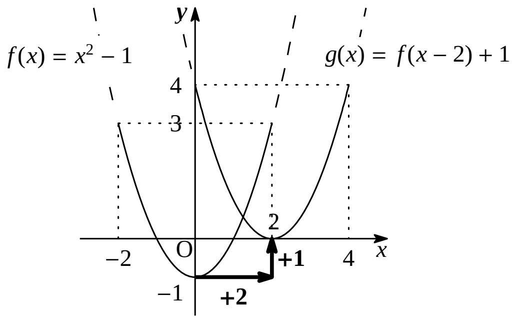
Como o ponto do vértice de $f(x) = x^2 - 1$ é $(0; -1)$, o ponto do vértice de $g(x) = f(x-2)+1$ é $(0+2; -1+1) = (2; 0)$.

Como o gráfico de $f(x)$ tem a concavidade virada para cima, então o gráfico de $g(x)$ também tem a concavidade virada para cima.

Como o domínio de $f(x)$ é $[-2; 2]$, o domínio de $g(x)$ é:

$$[-2+2; 2+2] = [0; 4]$$

Por isso, conclui-se que o gráfico da função $g(x)$ é da opção C.



FIM

República de Moçambique

Matemática	**Ministério da Educação**	**Exame Extraordinário**
12ª Classe / 2009	**Conselho Nacional de Exames, Certificação e Equivalências**	**120 Minutos**

Esta prova contém 40 perguntas com 4 alternativas de resposta para cada uma. Escolha a alternativa correcta e *RISQUE* a letra correspondente na sua folha de respostas.

1.

Sabendo que o valor do produto escalar entre os vectores $\vec{a} = (2; k)$ e $\vec{b} = (1; 4)$ é igual a 18, qual é o valor de k?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2009. Extraordinário

【Resolução】

Calcula-se: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + k \cdot 4 = 2 + 4k$
Como $\vec{a} \cdot \vec{b} = 18$, tem-se:

$$2 + 4k = 18 \Leftrightarrow 4k = 16 \Leftrightarrow k = 4$$

Opção: D

⟵ **Produto de dois vectores**:
Sejam $\vec{a} = (a_1, a_2)$ e $\vec{b} = (b_1, b_2)$. Então:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

2.

Quais são as coordenadas do ponto médio do segmento cujas extremidades são $(2; 7)$ e $(8; 5)$?

A. $(2; 3)$ B. $(3; 4)$ C. $(5; 6)$ D. $(6; 5)$

2009. Extraordinário

【Resolução】

As coordenadas do ponto médio do segmento cujas extremidades são $(2; 7)$ e $(8; 5)$ é: $\left(\frac{2+8}{2}; \frac{7+5}{2}\right) = (5; 6)$

Opção: C

⟵ **Ponto médio de segmento**:
Sejam $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$. Então o ponto médio do segmento AB é: $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

3.

Qual é a equação da recta que passa pelo ponto $(-2; 5)$ paralelamente à recta de equação $x - 2y - 12 = 0$?

A. $-x + 2y - 12 = 0$ B. $x + 2y - 12 = 0$ C. $2x + y - 1 = 0$ D. $-2x + y + 1 = 0$

2009. Extraordinário

【Resolução】

Seja l a recta procurada.

$x - 2y - 12 = 0 \Leftrightarrow -2y = -x + 12 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 6$

Logo, o declive da recta $y = \frac{1}{2}x - 6$ é $\frac{1}{2}$.

⟵ O declive da recta dada por $y = \boldsymbol{a}x + b$ é $\boldsymbol{a}$.

Como a recta l é paralela à recta $y = \frac{1}{2}x - 6$, o declive da recta l também é $\frac{1}{2}$.

⟵ Se m_1 e m_2 são declives das duas rectas **perpendiculares**, então tem-se: $\boldsymbol{m_1 \cdot m_2 = -1}$
Se m_1 e m_2 são declives das rectas **paralelas**, então tem-se: $\boldsymbol{m_1 = m_2}$

Então, a equação da recta l é dada por:

$$y - 5 = \frac{1}{2}[x - (-2)] \Leftrightarrow 2y - 10 = x + 2 \Leftrightarrow -x + 2y - 12 = 0$$

⟵ A equação da recta que passa por $(x_1; y_1)$ e tem declive m é dada por $y - y_1 = m(x - x_1)$

Opção: A

4.

Qual é a expressão equivalente a $\overline{M} \cap (M \cup N)$?

A. $\overline{M} \cap \overline{N}$ B. $\overline{M} \cap N$ C. $\overline{M} \cup N$ D. $M \cup \overline{N}$

2009. Extraordinário

【Resolução】

$\overline{M} \cap (M \cup N) = (\boldsymbol{\overline{M} \cap M}) \cup (\overline{M} \cap N)$

$= \boldsymbol{\emptyset} \cup (\overline{M} \cap N)$

$= \overline{M} \cap N$

Opção: B

⟵ Lei distributiva: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

⟵ A intersecção de qualquer conjunto A com o seu complementar $\overline{A}$ é o conjunto vazio, isto é, $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

⟵ A reunião de qualquer conjunto A com o conjunto vazio é sempre o próprio conjunto A, isto é, $\emptyset \cup A = A$.

5.

Numa turma de 50 alunos, 25 gostam de Matemática e 27 de Física. Se 8 alunos gostam das duas disciplinas, quantos NÃo gostam de nenhuma das disciplinas acima referidas?

A. 19 B. 17 C. 6 D. 2

2009. Extraordinário

【Resolução】

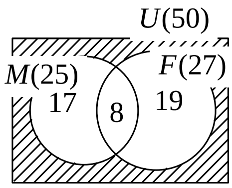
Sejam:

U- Conjunto de todos os alunos da turma;

M- Conjunto dos alunos que gostam de Matemática;

F - Conjunto dos alunos que gostam de Física.

Então constroi-se o diagramma como a figura mostra.



A partir do diagramma, os alunos que não gostam de nenhuma das disciplinas são:

$50 - (17 + 8 + 19) = 50 - 44 = 6$

Opção: C

⟵ Nota-se que: $n(U) = 50$, $n(M) = 25$, $n(F) = 27$ e $n(M \cap N) = 8$

⟵ Os alunos que gostam somente de Matemátiaca são: $25 - 8 = 17$
Os alunos que gostam somente de Física são: $27 - 8 = 19$

6.

Qual é a solução da equação $5^x + 5^{x+1} = 30$?

A. $x = 1$ B. $x = 2$ C. $x = 3$ D. $x = 4$

2009. Extraordinário

【Resolução】

$5^x + 5^{x+1} = 30 \Leftrightarrow 5^x + 5^x \cdot 5 = 30$

$\Leftrightarrow 5^x(1 + 5) = 30 \Leftrightarrow 6 \cdot 5^x = 30$

$\Leftrightarrow 5^x = 5 \Leftrightarrow 5^x = 5^1 \Leftrightarrow x = 1$

Opção: A

⟵ $5^{x+1} = 5^x \cdot 5^1 = 5^x \cdot 5$ aplicando $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

⟵ Coloca-se o factor comun 5^x em evidência.

⟵ $a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$

7.

Qual é a solução da equação $\sqrt{3 - 2x} = 2$?

A. $-\frac{7}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $-\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{5}$

2009. Extraordinário

【Resolução】

Antes da resolução, apresenta-se a condição:

$$3 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

Resolve-se a equação $\sqrt{3 - 2x} = 2$:

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, tem-se:

$$3 - 2x = 4 \Leftrightarrow -2x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Opção: B

⟵ Como o índice 2 é par, o radicando é maior igual a zero.
Expressão algébrica irracional $\sqrt[n]{x}$:
- Se o índice n é par, então $x \geq 0$
- Se o índice n é ímpar, então $x \in \mathbb{R}$

⟵ Como $x = -\frac{1}{2} < \frac{3}{2}$, satisfaz a condição $x \leq \frac{3}{2}$.

8.

Ao dividir um polinómio $p(x)$ por $x^2 + 1$ obtém-se como quociente $2x - 1$ e resto $x + 1$. Qual é o polinómio $p(x)$?

A. $-2x^3 - x^2 + 3x$ B. $-2x^3 - x^2 - 3x$ C. $2x^3 - x^2 - 3x$ D. $2x^3 - x^2 + 3x$

2009. Extraordinário

【Resolução】

Como o quociente e o resto da divisão de $p(x)$ por x^2+1 são respectivamente $2x-1$ e $x+1$, tem-se:

$$p(x) = (x^2+1)\cdot(2x-1)+(x+1)$$
$$= 2x^3 - x^2 + 2x - 1 + x + 1 = 2x^3 - x^2 + 3x$$

←Se o quociente e o resto da divisão de um polinómio $p(x)$ por $d(x)$ forem respectivamente $q(x)$ e $r(x)$, então tem-se: $p(x) = d(x)\cdot q(x) + r(x)$

Opção: D

9.

A solução do sistema $\begin{cases} 2^x = 4 \\ x+y=2 \end{cases}$ é...

A. $(0;3)$ B. $(2;0)$ C. $(3;0)$ D. $(2;2)$

2009. Extraordinário

【Resolução】

Resolvendo a primeira equação, tem-se: $2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$

←Iguala-se os expoentes porque as bases dos dois membros da equação são iguais, isto é, $a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$.

Substituindo x por 2 na segunda equação, tem-se:

$2 + y = 2 \Leftrightarrow y = 0$.

Opção: B

10.

Observa a tabela:

Valor de x	1	2	3	4	5
Frequência de x	1	2	3	4	5

Qual é o valor da mediana de x?

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

2009. Extraordinário

【Resolução】

O número de dados é: $1+2+3+4+5=15$

←Soma da frequência

Como o número de dados é ímpar, a mediana será o valor central.

←Mediana é o valor que ocupa a posição central de um conjunto de dados ordenados.
Para determinar a mediana é preciso ordenar os dados. Se o número de dados é ímpar, então a mediana é o valor que ocupa a posição central dos dados ordenados. Se o número de dados é par, então a mediana é a média aritmética dos dois valores que ocupam a posição central dos dados ordenados.

$$\underbrace{1\ 2\ 2\ 3\ 3\ 3\ 4}_{\text{7 dados}}\ \boxed{4}\ \underbrace{4\ 4\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5}_{\text{7 dados}}$$

Logo, a mediana é 4.

Opção: C

11.

Sendo $\cos x = -\dfrac{1}{3}$, com $x \in 3°$ quadrante, qual é o valor de sen$x$?

A. $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ B. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ D. $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

2009. Extraordinário

【Resolução】

Na fórmula fundamental de trigonometria $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, substituindo $\cos x$ por $-\dfrac{1}{3}$, tem-se:

←**<Relações trigonométricas do mesmo ângulo>**

1. $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ **2.** $\text{tg}\theta = \dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$

3. $1 + \text{tg}^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$$\text{sen}^2 x + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2 x = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \text{sen}x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como $x \in 3°$ quadrante, então $\text{sen}x < 0$.

←**<Sinal das razões trigonométricas>**

α	1° Q	2° Q	3° Q	4° Q
senα	+	+	-	-
cos α	+	-	-	+
tgα	+	-	+	-
cotgα	+	-	+	-

Logo, $\text{sen}x = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Opção: D

12.

Qual é a solução da equação $\text{sen}(x+\pi) = \dfrac{1}{2}$; $x \in [0; 2\pi]$?

A. $-\dfrac{5\pi}{6}$ B. $-\dfrac{\pi}{2}$ C. $-\dfrac{2\pi}{3}$ D. $-\dfrac{\pi}{3}$

2009. Extraordinário

〔Resolução〕

Com a condição $x \in [0; 2\pi]$, não há nenhuma opção correcta.
Se não tivesse a condição, a resolução seria:
Substitui-se x por cada valor das opções dadas na equação:

A. $\text{sen}\left(-\dfrac{5\pi}{6}+\pi\right) = \text{sen}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

B. $\text{sen}\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi\right) = \text{sen}\dfrac{\pi}{2} = 1 \neq \dfrac{1}{2}$

C. $\text{sen}\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = \text{sen}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \neq \dfrac{1}{2}$

D. $\text{sen}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \neq \dfrac{1}{2}$

Por isso, sem condição a solução seria a opção A.

Opção: A

⟵ Os valores de x das opções dadas não pertencem ao intervalo $[0; 2\pi]$.

⟵ Como $\text{sen}\left(-\dfrac{5\pi}{6}+\pi\right) = \dfrac{1}{2}$, então $-\dfrac{5\pi}{6}$ é a solução da equação $\text{sen}(x+\pi) = \dfrac{1}{2}$

〔Outra resolução〕

Como $\text{sen}(x+\pi) = -\text{sen}x$, a equação fica:

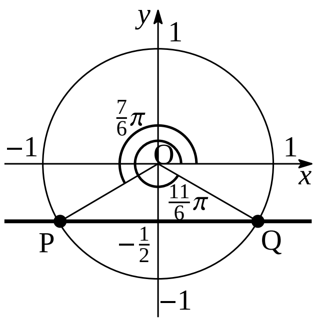
$$\text{sen}(x+\pi) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\text{sen}x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \text{sen}x = -\frac{1}{2}$$

Resolve-se a equação $\text{sen}x = -\dfrac{1}{2}$; $x \in [0; 2\pi]$.

Sejam P e Q os dois pontos das intersecções da recta $y = -\dfrac{1}{2}$ com o círculo trigonométrico.

Como os ângulos procurados x são os ângulos formados pelo segmento OP com o eixo das abcissas no sentido positivo e pelo segmento OQ com o eixo das abcissas no sentido positivo, tem-se:

$x = \dfrac{7}{6}\pi$ e $x = \dfrac{11}{6}\pi$



⟵ $\text{sen}(x+\pi) = -\text{sen}x$; $\cos(x+\pi) = -\cos x$
$\text{tg}(x+\pi) = \text{tg}x$; $\text{cotg}(x+\pi) = \text{cotg}x$

⟵ A solução da equação $\cos\theta = \alpha$ é o ângulo formado pelo segmento OP com o eixo das abcissas no sentido positivo, onde P é o ponto da intersecção da recta $x = \alpha$ com o círculo trigonométrico.
A solução da equação $\text{sen}\theta = \alpha$ é o ângulo dado pelo segmento OP, onde P é a intersecção da recta $y = \alpha$ com o círculo trigonométrico.

13.

Em $\mathbb{R}$, a solução da equação $|3x-1| = -2$ é...

A. $\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$ B. $\{\ \}$ C. $\{1\}$ D. $\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

2009. Extraordinário

〔Resolução〕

Como $|3x-1| \geq 0$, então a equação $|3x-1| = -2$ não é possível em $\mathbb{R}$.
Logo, a solução da equação é o conjunto vazio.

Opção: B

⟵ O módulo de qualquer número é sempre maior ou igual a zero, isto é, $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$.

14.

Qual é a solução da inequação $|2x+1| \leq \dfrac{3}{4}$?

A. $\dfrac{1}{8} \leq x \leq \dfrac{7}{8}$ B. $-\dfrac{7}{8} \leq x \leq \dfrac{1}{8}$ C. $-\dfrac{7}{8} \leq x \leq -\dfrac{1}{8}$ D. $-\dfrac{1}{8} \leq x \leq \dfrac{7}{8}$

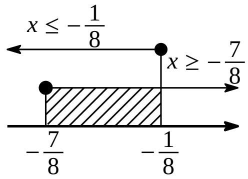
2009. Extraordinário

【**Resolução**】

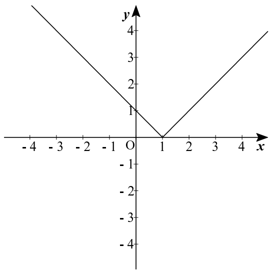
$$|2x+1| \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow 2x+1 \le \frac{3}{4} \ \vee\ 2x+1 \ge -\frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow 2x \le \frac{3}{4} - 1 \ \vee\ 2x \ge -\frac{3}{4} - 1$$
$$\Leftrightarrow 2x \le -\frac{1}{4} \ \vee\ 2x \ge -\frac{7}{4}$$
$$\Leftrightarrow x \le -\frac{1}{8} \ \vee\ x \ge -\frac{7}{8}$$
$$\Leftrightarrow -\frac{7}{8} \le x \le -\frac{1}{8}$$

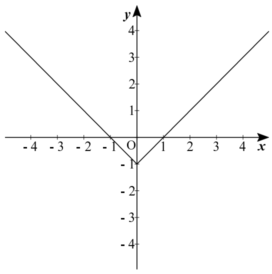
Opção: C

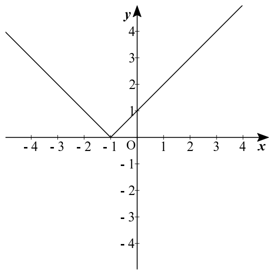
⟵ Inequações módulares:
★$|x| < a \Leftrightarrow x < a \ \wedge\ x > -a$
★$|x| > a \Leftrightarrow x > a \ \vee\ x < -a$

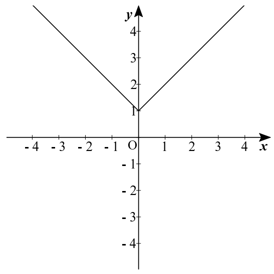
⟵ 

15.
Qual é o gráfico da função $y = |x-1|$?

A. 

B. 

C. 

D. 

2009. Extraordinário

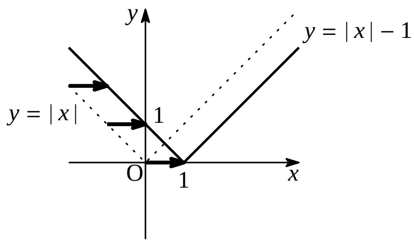
【**Resolução**】
O gráfico de $y = |x - \mathbf{1}|$ obtém-se a partir do gráfico $y = |x|$ através da translação de **1** unidade para direita.
Então, a solução é da opção **A**.

Opção: A

【**Outra resolução**】
Substituindo $x = 1$ em $y = |x-1|$, tem-se $y = |1-1| = 0$.
Portanto o gráfico da função passa pelo ponto $(1; 0)$.
De igual modo, nota-se que passa pelo ponto $(0; 1)$.
Verifica-se que só o gráfico da opção **A** passa pelos pontos $(1; 0)$ e $(0, 1)$.
Então, a opção correcta é **A**.

⟵ O gráfico da função $y = f(x - \boldsymbol{p}) + \boldsymbol{q}$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = f(x)$ através da translação de $\boldsymbol{p}$ unidades para direita e $\boldsymbol{q}$ unidades para cima.

O gráfico da função $y = |x|$ é:



16.
Qual é o período da função $m(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$?

A. π B. 2π C. 3π D. 4π

2009. Extraordinário

【**Resolução**】
Como o coeficiente de x de $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ é $\frac{1}{2}$, então o período da função $m(x)$ é: $\dfrac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Opção: D

⟵ **Períodos das funções trigonométricas**:
★ Os períodos de $y = \text{sen}kx$ e $y = \cos kx$ são $\dfrac{2\pi}{|k|}$.
★ O período de $y = \text{tg}kx$ é $\dfrac{\pi}{|k|}$.

17.
Na função $f(x) = \dfrac{2x+2}{x+3}$ qual é a equação da assímptota horizontal?

A. $y = 2$ B. $y = 3$ C. $x = 2$ D. $x = 3$

2009. Extraordinário

【Resolução】
A função $f(x) = \dfrac{2x+2}{x+3} = \dfrac{\mathbf{2}\cdot x+2}{\mathbf{1}\cdot x+3}$ é homográfica.
Então a equação da assímptota horizontal é $y = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}} = 2$.

Opção: A

Uma função do tipo $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ é homográfica cujas assímptotas vertical e horizontal são dadas pelas seguintes equações:
★AV : $x = -\dfrac{d}{c}$ (← Zero do denominador)
★AH : $y = \dfrac{a}{c}$ (← Quociente dos coeficientes de x)

18.
Se o ponto $(2;4)$ pertence ao gráfico da função $y = f(x)$, quais são as coordenadas de um ponto do gráfico da função $g(x) = 2f(x-3)+1$?

A. $(2;6)$ B. $(3;7)$ C. $(4;8)$ D. $(5;9)$

2009. Extraordinário

【Resolução】
Como o ponto $(2;4)$ pertence ao gráfico da função $y = f(x)$, tem-se: $f(2) = 4$
Logo, tem-se: $g(5) = 2f(5-3)+1 = 2$
$= \boldsymbol{f(2)} + 1$
$= 2\cdot\mathbf{4}+1 = 9$
Como $g(5) = 9$, então $(5;9)$ é um ponto do gráfico de $g(x)$.

Opção: D

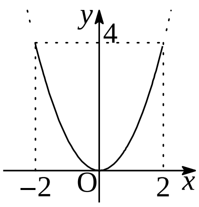
⟵ Se o ponto $(x_1;y_1)$ pentence ao gráfico de uma função $y = f(x)$, então tem-se: $f(x_1) = y_1$
⟵ Substitui-se x por 5 em $g(x) = 2f(x-3)+1$.
⟵ $f(2) = 4$

19.
Seja $f(x) = x^2$ uma função definida no intervalo $[-2;2]$. Qual é o contradomínio da função $g(x) = 2f(x)+3$?

A. $[-1;7]$ B. $[-4;6]$ C. $[3;11]$ D. $]3;11[$

2009. Extraordinário

【Resolução】
Pela leitura da figura, o contradomínio da função $f(x) = x^2$ em $[-2;2]$ é $[0;4]$.
Em seguida, determina-se o contradomínio de $g(x)$:



$0 \le f(x) \le 4 \Leftrightarrow 0 \le 2f(x) \le 8$
$\Leftrightarrow 3 \le 2f(x)+3 \le 11 \Leftrightarrow 3 \le g(x) \le 11$
Por isso, o contradomínio de $g(x)$ é $[3;11]$.

Opção: C

⟵ As coordenadas do vértice da função $f(x) = x^2$ são $(0;0)$ porque $f(x) = x^2 = (x-0)^2+0$.
⟵ Multiplica-se por 2 todos os membros da inequação.
⟵ Adiciona-se 3 a todos os membros da inequação.

20.
Qual é a inversa da função $f(x) = \log_3(x+2)$?

A. $f^{-1}(x) = 3^{x+2}$ B. $f^{-1}(x) = 3^x - 2$ C. $f^{-1}(x) = 3^{x-2}$ D. $f^{-1}(x) = 3^x$

2009. Extraordinário

【Resolução】
Substituindo $f(x)$ por y, tem-se: $y = \log_3(x+2)$.
Resolve-se $y = \log_3(x+2)$ em ordem a x:
$\log_3(x+2) = y \Leftrightarrow \log_3(x+2) = \log_3 3^y$
$\Leftrightarrow x+2 = 3^y$
$\Leftrightarrow x = 3^y - 2$
Trocando as variáveis x por y e y por x, tem-se $y = 3^x - 2$, que é a função inversa pedida, $f^{-1}(x) = 3^x - 2$.

Opção: B

⟵ Adopta-se $\log_3$ no segundo membro. $y = \log_3 3^y$
⟵ Como as bases dos dois membros são iguais, iguala-se os logaritmandos.
⟵ Como a função dada é logarítmica, a sua inversa será uma função exponencial.

21.
Dadas as funções $k(x) = x^2+1$ e $g(x) = x-2$, sendo $[kog](x) = 1$, qual é o valor de x?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2009. Extraordinário

【Resolução】

Calcula-se $[kog](x)$:

$$[kog](x) = k(\boldsymbol{g(x)}) = k(\boldsymbol{x-2}) = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$$

Como $[kog](x) = 1$, tem-se:

$$x^2 - 4x + 5 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Opção: C

⟵ **Função composta**: $(kog)(x) = k(g(x))$

⟵ Para se obter $k(x-2)$ substitui-se x por $x-2$ em $k(x) = x^2 + 1$.

⟵ Factoriza-se $x^2 - 4x + 4$ aplicando $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

22.

Das sucessões seguintes qual é infinitamente pequena?

A. $0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \ldots$ B. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots$ C. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \ldots$ D. $2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \ldots$

2009. Extraordinário

【Resolução】

Calcula-se o limite de cada sucessões das opções dadas.

A. O termo geral é $\frac{n-1}{n}$. Logo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \frac{1}{1} = 1$

B. O termo geral é $\frac{n}{n+1}$. Logo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1} = 1$

C. O termo geral é $\frac{1}{n}$. Logo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

D. O termo geral é $\frac{n+1}{n}$. Logo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{1} = 1$

Como o limite da sucessão da opção C é 0, então conclui-se que a sucessão de C é infinitamente pequena.

Opção: C

⟵ Se o numerador e o denominador de uma expressão algébrica racional fraccionária têm o mesmo grau, então o limite da expressão quando $x \to \infty$ é igual ao quociente dos coeficientes dos termos de maior grau, isto é: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\boldsymbol{a_1}x^n + b_1x^{n-1} + c_1x^{n-2} + \cdots}{\boldsymbol{a_2}x^n + b_2x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \cdots} = \frac{\boldsymbol{a_1}}{\boldsymbol{a_2}}$

⟵ Diz-se que uma sucessão a_n é **infinitamente pequena** se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathbf{0}$. Diz-se que uma sucessão a_n é **infinitamente grande** se $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = \boldsymbol{\infty}$ ou $\boldsymbol{-\infty}$.

23.

Se o Aldeir corre na primeira semana 5km, qual será a distância percorrida até a décima semana se por semana aumenta 3km?

A. 32km B. 35km C. 175km D. 185km

2009. Extraordinário

【Resolução】

A distância percorrida pelo Aldeir representa-se pela seguinte sucessão: $5; 8; 11; 14; \ldots$

Esta sucessão é uma PA porque a diferença entre dois termos consecutivos é constante 3.

Logo, o termo geral da sucessão é:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Leftrightarrow a_n = 5 + (n-1)3 = 3n + 2$$

Deseja-se a soma dos 10 primeiros termos, isto é:

$$S_{10} = \frac{10[2\cdot 5 + (10-1)3]}{2} = \frac{10\cdot 37}{2} = 185$$

Opção: D

⟵ 5, 8, 5, 11, 14, ...

+3 +3 +3 +3 +3

⟵ O termo geral de uma PA cuja a diferença é d é dado por: $a_n = a_1 + (n-1)d$

⟵ A soma dos n primeiros termos de uma PA cuja diferença é d é dada por:

$$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2} \quad \text{ou} \quad S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

24.

Numa progressão geométrica com $a_1 = 3$ e $q = 2$. Qual é a ordem do termo 192?

A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

2009. Extraordinário

【Resolução】

O termo geral de uma PG em que $a_1 = 3$ e $q = 2$ é: $a_n = 3\cdot 2^{n-1}$

Resolve-se a equação $a_n = 192$:

$$a_n = 192 \Leftrightarrow 3\cdot 2^{n-1} = 192 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 64 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^6 \Leftrightarrow n - 1 = 6 \Leftrightarrow n = 7$$

Opção: A

⟵ O termo geral de uma PG é dado por: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

⟵ $64 = 2^6$

⟵ $a^m = a^n \Leftrightarrow m = n$

25.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x}}{x}$?

A. $-\infty$ B. -1 C. 1 D. $\sqrt{3}$

2009. Extraordinário

【Resolução】

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\boldsymbol{\sqrt{x^2}}\cdot\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\boldsymbol{-x}\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\frac{3}{x}}$$

$$=-\sqrt{1}=-1$$

Opção: B

$\longleftarrow x^2+3x=x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)$

$\longleftarrow$ Sabe-se $\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x & \text{se } x\ge 0\\ -x & \text{se } x<0\end{cases}$.

Quando $x\to-\infty$, como $x<0$, então $\sqrt{x^2}=-x$.

26.

Qual é o valor do $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{sen}5x}{2x}$?

A. $\dfrac{2}{5}$ B. 2 C. $\dfrac{5}{2}$ D. 5

2009. Extraordinário

【Resolução】

$$\lim_{x\to0}\frac{\text{sen}5x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\text{sen}5x}{5x}\cdot\frac{5x}{2x}=1\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$$

Opção: C

$\longleftarrow$ **Limite notável**: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{sen}x}{x}=1$

【Outra resolução】

Como $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{sen}\boldsymbol{\alpha}x}{\boldsymbol{\beta}x}=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}$, então $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{sen}\mathbf{5}x}{\mathbf{2}x}=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$

$\longleftarrow \star\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{sen}\alpha x}{\beta x}=\dfrac{\alpha}{\beta}$; $\star\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\text{sen}\alpha x}{\text{sen}\beta x}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

27.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2009. Extraordinário

【Resolução】

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt[3]{x})^3-1^3}{\sqrt[3]{x}-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)[(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1]}{\sqrt[3]{x}-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)=1+1+1=3$$

Opção: D

$\longleftarrow x=(\sqrt[3]{x})^3$ porque $a=(\sqrt[n]{a})^n$

$\longleftarrow a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\longleftarrow$ Subsitui-se x por 1.

【Outra resolução】

Seja $x=t^{\mathbf{3}}$, se $x\to0$ então $t\to0$.

Logo, o limite dado fica:

$$\lim_{t\to1}\frac{t^3-1}{\sqrt[3]{t^3}-1}=\lim_{x\to1}\frac{t^3-1}{t-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{t-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(t^2+t+1)=1+1+1=3$$

$\longleftarrow$ Encontra-se o mínimo múltiplo comum (m.m.c) dos índices dos radicais: $m.m.c(3,1)=\mathbf{3}$

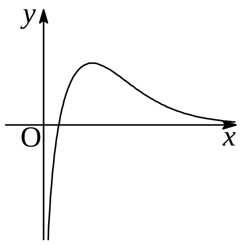
$\longleftarrow \sqrt[n]{a^n}=a$

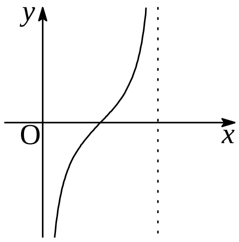
$\longleftarrow a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

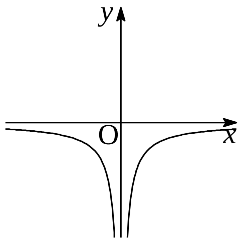
$\longleftarrow$ Substitui-se t por 1.

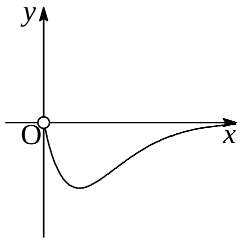
28.

De uma função f sabe-se que: domínio de f é $\mathbb{R}^+$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$. Qual dos gráficos poderá ser de $f(x)$?

A. 

B. 

C. 

D. 

★2009. Extraordinário

【**Resolução**】

Determina-se o domínio, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ de cada função dos gráficos das opções dadas:

A. $D_f = \mathbb{R}^+$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

⟵ Como o gráfico coloca-se à direita do eixo das ordenadas, $D_f = \mathbb{R}^+$. Como quando $x \to +\infty$, $f(x)$ tende para 0, $\lim\limits_{x\to+\infty} = 0$.
Como $\nexists \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, então $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

B. $D_f =]0; k[$, onde $k \in \mathbb{R}^+$; $\nexists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

C. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$

⟵ Como a recta $x = 0$ é uma AV, então $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Como quando $x \to +\infty$, $f(x)$ se aproxima de 0, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Como $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

D. $D_f = \mathbb{R}^+$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Por isso, não há nenhuma solução correcta.

Opção: Nenhuma

Observação:
Para que haja solução, é necessário que a última condição dada $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ passe para $\lim\limits_{x\to \mathbf{0^+}} f(x) = -\infty$.
A solução seria a opção A.

Ou:

A primeira condição dada o domínio de f é $\mathbb{R}^+$ passe para o domínio de f é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. A solução seria a opção C.

29.

Os valores de p e q para que a função $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 0 \\ px + q & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 2 & \text{se } x \ge 1 \end{cases}$ seja contínua em $\mathbb{R}$ são respectivamente...

A. 0 e 1 B. 2 e 0 C. 1 e 2 D. 2 e 1

2009. Extraordinário

【**Resolução**】

Para que a função $f(x)$ seja contínua em $\mathbb{R}$, é necessário que seja contínua em $x = 0$ e $x = 1$.

⟵ Pela leitura da definição de $f(x)$, nota-se que o gráfico de $f(x)$ muda-se em $x = 0$ e $x = 1$.

Então, para que f seja contínua em $x = 0$, é necessário que:
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

⟵ $f(x)$ é contínua no ponto de abcissa $x = a$
$\Longleftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} = f(a)$
$\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

E para que seja contínua em $x = 1$, também é necessário que:
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

Em $x = 0$, tem-se:

O limite lateral à esqurerda de $x = 0$ é: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0^2 = \mathbf{0}$

⟵ Quando $x \to 0^-$, isto é, $x < 0$, $f(x) = x^2$.

O limite lateral à direita $x = 0$ é: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = p \cdot 0 + q = \boldsymbol{q}$

⟵ Quando $x \to 0^+$, isto é, $0 < x < 1$, $f(x) = px + q$.

O valor da função no ponto $x = 0$ é: $f(0) = p \cdot 0 + q = \boldsymbol{q}$

⟵ Quando $x = 0$, $f(x) = px + q$.

Como estes devem ser iguais, tem-se: $\boldsymbol{q = 0}$.

Em $x = 1$, tem-se:

O limite lateral à esqurerda de $x = 1$ é:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = p\cdot 1 + q = p + \boldsymbol{q} = p + \mathbf{0} = \boldsymbol{p}$$

O limite lateral à direita de $x = 1$ é: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \mathbf{2}$

O valor da função no ponto $x = 0$ é: $f(1) = \mathbf{2}$

Como estes são iguais, tem-se: $\boldsymbol{p = 2}$

Por isso, p e q são respectivamente 2 e 0.

Opção: B

⟵ Quando $x \to 1^-$, isto é, $0 < x < 1$, $f(x) = px + 1$.

⟵ Quando $x \to 1^+$, isto é, $x > 1$, $f(x) = 2$.

⟵ Quando $x = 1$, $f(1) = 2$.

30.

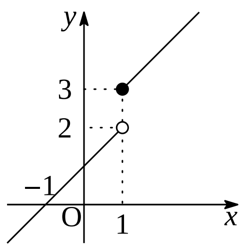
A figura representa o gráfico de uma função $y = f(x)$. Com base na figura podemos concluir que...

A. existe $\lim_{x\to 1} f(x)$

B. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$

C. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

D. não existe $\lim_{x\to 1} f(x)$



2009. Extraordinário

【**Resolução**】

Pela leitura da figura, tem-se:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$$

Como os limites laterais em $x = 1$ são diferentes, então conclui-se que não existe $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Então, a opção correcta é D.

Opção: D

⟵ Quando x se aproxima de 1 pela esquerda, $f(x)$ aproxima-se de 2, isto é: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$.

Quando x se aproxima de 1 pela direita, $f(x)$ aproxima-se de 3, isto é: $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$

⟵ $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \alpha \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \alpha$

$\boldsymbol{\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x) \Longleftrightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)}$

31.

Considerando a figura do exercício n° 30, qual é o valor de $f'(0)$?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2009. Extraordinário

【**Resolução**】

$f'(0)$ é igual ao declive da recta tangente ao gráfico de $f(x)$ em $x = 0$. Logo, determina-se o declive da recta tangente em $x = 0$.

A recta tangente em qualquer ponto no intervalo $x < 1$ coincide com o gráfico da função $f(x)$ à esquerda de $x = 1$.

Pela leitura da figura, como o gráfico de f à esquerda de $x = 1$ passa por $(-1; 0)$ e $(1; 2)$,

então o seu declive é dado por: $\dfrac{2-0}{1-(-1)} = 1$

Por isso, $f'(0) = 1$.

Opção: A

⟵ $f'(a)$ é igual ao declive da recta tangente ao gráfico de $f(x)$ em $x = a$.

⟵ A recta tangente ao gráfico da função do primeiro grau em qualquer ponto coincide com esse gráfico.

⟵ O declive da recta que passa pelos dois pontos $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ é dado por $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

32.

Qual é a derivada da função $f(x) = \text{tg}x$?

A. cotgx B. $\dfrac{1}{\text{sen}^2 x}$ C. $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ D. $\dfrac{1}{\text{cotg}^2\text{x}}$

2009. Extraordinário

【**Resolução**】

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Opção: C

⟵ $(\text{sen}x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\text{sen}x$;

$(\text{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $(\text{cotg}x)' = -\dfrac{1}{\text{sen}^2 x}$

33.

Qual é a derivada da função $h(x) = e^x \cdot x^e$?

A. $e^x x^e\left(1 - \frac{x}{e}\right)$ B. $e^x x^e\left(1 - \frac{e}{x}\right)$ C. $e^x x^e\left(1 + \frac{x}{e}\right)$ D. $e^x x^e\left(1 + \frac{e}{x}\right)$

2009. Extraordinário

【Resolução】

$$\begin{aligned} h'(x) &= (e^x \cdot x^e)' = (e^x)' \cdot x^e + e^x \cdot (x^e)' \\ &= e^x \cdot x^e + e^x \cdot ex^{e-1} \\ &= e^x x^e + e^x \cdot e \cdot x^e \cdot x^{-1} \\ &= \boldsymbol{e^x x^e} + \boldsymbol{e^x x^e} \cdot \frac{e}{x} \\ &= \boldsymbol{e^x x^e}\left(1 + \frac{e}{x}\right) \end{aligned}$$

Opção: D

⟵ $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
⟵ $(e^x)' = e^x$;
$(x^e)' = ex^{e-1}$ porque $(x^n)' = nx^{n-1},\ \forall n \in \mathbb{R}$
⟵ $x^{e-1} = x^e \cdot x^{-1}$ porque $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
⟵ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; Caso especial: $a^{-1} = \frac{1}{a}$
⟵ Coloca-se em evidência o factor comun $e^x x^e$.

34.

Qual é o declive da recta tangente ao gráfico da função $g(x) = x^2 - 2x$ no ponto de abcissa $x = 2$?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2009. Extraordinário

【Resolução】

Calcula-se: $g'(x) = 2x - 2$
Logo, o declive da tangente ao gráfico de $g(x)$ em $x = 2$ é:
$g'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2$

Opção: C

⟵ $(x^2)' = 2x$; $(2x)' = 2$
⟵ O declive da recta tangente ao gráfico da função $f(x)$ em $x = a$ é igual a $f'(a)$.

35.

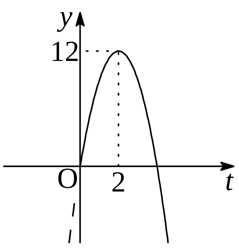
Qual é a altura máxima, em metros, que um objecto lançado verticalmente para cima segundo a equação $h(t) = 12t - 3t^2$ atinge?

A. 6m B. 12m C. 18m D. 24m

2009. Extraordinário

【Resolução】

Deseja-se o máximo da função quadrática $h(t) = 12t - 3t^2$.
Como t representa o tempo, deve ser maior ou igual a zero.
Então, o dominio é: $t \geq 0$



$$\begin{aligned} h(t) &= -3t^2 + 12t = -3(t^2 - 4t) \\ &= -3[(t-2)^2 - 2^2] = -3(t-2)^2 + 12 \end{aligned}$$

⟵ Quadrado pergfetio; $x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

Logo, o gráfico representa-se como a figura mostra e tem a concavidade virada para baixo e o vértice $(2; 12)$, sendo 12 o valor máximo da função.
Por isso, a altura máxima é 12m.

⟵ O vértice do gráfico da função quadrática $y = a(x - p)^2 + q$ é $(p; q)$. Se $a > 0$, então o gráfico tem a concavidade virada para cima e se $a > 0$, tem a concavidade virada para baixo.

Opção: B

【Outra resolução】

Calcula-se: $h'(t) = 12 - 3 \cdot 2t = 12 - 6t$
Resolvendo $h'(t) = 0$, tem-se: $12 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 2$
Constroi-se a tabela de monotonia e extremos:

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(t)$		$+$	0	$-$
$h(t)$		$\nearrow$	Máx	$\searrow$

A partir da tabela, o máximo da função $h(t)$ é:
$h(2) = 12 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 = 12$

⟵ Diz-se que a função $f(x)$ tem para $x = a$ um extremo máximo se $f(a) = 0$ e $f'(x)$ passa em $x = a$ de positiva a negativa.
Diz-se que a função $f(x)$ tem para $x = a$ um extremo mínimo se $f(a) = 0$ e $f'(x)$ passa em $x = a$ de negativa a positiva.

36.

Em qual dos intervalos a função $f(x) = x^3 - 3x$ é decrescente?

A. $]-1;1[$ B. $]-\infty;-1[$ C. $]-1;2[$ D. $]1;+\infty[$

2009. Extraordinário

【**Resolução**】

Calcula-se: $f'(x) = 3x^2 - 3 \cdot 1 = 3x^2 - 3$

Para que $f(x)$ seja decrescente num intervalo, é necessário que $f'(x) < 0$ nesse intervalo.

Resolve-se a inequação $f'(x) < 0$:

$$3x^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) < 0$$
$$\Leftrightarrow -1 < x < 1$$

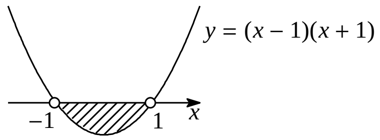
Por isso, conclui-se que $f(x)$ é decrescente em $]-1;1[$.

Opção: A

⟵ $(x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$

⟵ Se $f'(x) > 0$, $f(x)$ é crescente.
Se $f'(x) < 0$, então $f(x)$ é decrescente.

⟵



【**Outra resolução**】

Calcula-se os zeros de $f'(x)$:

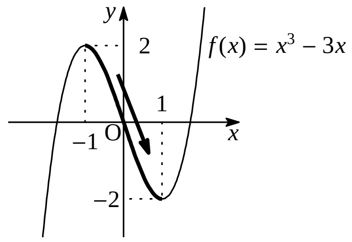
$$3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm$$

Constroi-se a tabela de monotonia e extremos:

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	Máx	↘	Mín	↗

A partir da tabela, couclui-se que $f(x)$ é decrescente em $]-1;1[$.

O gráfico da função $y = x^3 - 3x$ representa-se:



37.

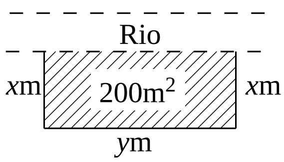
O senhor Victor pretende comprar rede para vedar uma machamba rectangular de 200m^2, situada ao longo de um rio. Não sendo necessário vedar o lado do rio e desejando que o perímetro da vedação seja mínimo, qual é a quantidade de rede a comprar?

A. 20m B. 30m C. 40m D. 50m

2009. Extraordinário

【**Resolução**】

Sejam x e y os comprimentos de dois lados da machamba como a figura mostra. Então $x > 0$ e $y > 0$.



Então, tem-se: $x \cdot y = 200 \cdots ①$

⟵ porque a área da machamba rectangular é 200m^2.

Como não é necessário vedar o lado do rio, o perímetro da vedação é $2x + y$. Então, calcula-se o mínimo de $2x + y$:

⟵ $x + y + x = 2x + y$

Por ①, como $y = \dfrac{200}{x}$, tem-se: $2x + \boldsymbol{y} = 2x + \boldsymbol{\dfrac{200}{x}}$

⟵ $xy = 200 \Leftrightarrow y = \dfrac{200}{x}$

Sendo $f(x) = 2x + \dfrac{200}{x}$, tem-se: $f'(x) = 2 - \dfrac{200}{x^2}$

⟵ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$

Resolvendo $f'(x) = 0$, tem-se:

$$2 - \frac{200}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 200 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = \pm 10$$

Então, constroi-se a tabela de monotonia e extremos:

x	0	$\cdots$	10	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	Mín	↗

⟵ ★ Se uma função $f(x)$ tem **derivada nula** para $x = a$ (ou seja $\boldsymbol{f'(a) = 0}$) e $f'(x)$ passa nesse ponto de **negativa a positiva**, a função $f(x)$ tem para $x = a$ um extremo **mínimo**.
★ Se uma função $f(x)$ tem **derivada nula** para $x = a$ (ou seja $\boldsymbol{f'(a) = 0}$) e $f'(x)$ passa nesse ponto de **positiva a negativa**, a função $f(x)$ tem para $x = a$ um extremo **máximo**.

Pela leitura da tabela, conclui-se que $f(x)$ tem o extremo mínimo em $x = 10$. Neste caso, o extremo mínimo é o mínimo absoluto da função $f(x)$.

Logo, o mínimo de $f(x)$ é $f(10) = 20 + \dfrac{200}{100} = 20 + 20 = 40$.

Opção: C

38.

Qual é a negação de $\exists! x \in \mathbb{R} : x + 1 = 3$?

A. $\exists! x \in \mathbb{R} : x + 1 \neq 3$ B. $\forall x \in \mathbb{R} : x + 1 \neq 3$ C. $\forall x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 3$ D. $\exists! x \in \mathbb{R} : x - 1 = 3$

2009. Extraordinário

【Resolução】

Pelas segundas leis de De Morgan, tem-se:

"$\sim (\exists x \in \mathbb{R} : x + 1 = 3)$" é "$\forall x \in \mathbb{R} : x + 1 \neq 3$"

Opção: B

⟵ **Segundas leis de De Morgan:**
Seja p uma proposição qualquer. Então:
★ $\sim (\forall x : p) = \exists x :\sim p$
★ $\sim (\exists x : p) = \forall x :\sim p$

39.

De quantas maneiras diferentes duas pessoas podem sentar num banco de cinco lugares?

A. $\dfrac{5!}{2!}$ B. $5!2!$ C. $\dfrac{5!}{2!3!}$ D. $\dfrac{5!}{3!}$

2009. Extraordinário

【Resolução】

Deseja-se o número total das maneiras diferentes possíveis de escolher 2 elementos dentre 5 elementos e permutar os 2 elementos entre si. Como interessa a ordem, trata-se de um arranjo de 5 elementos tomados 2 a 2. Logo, tem-se:

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!}$$

Opção: D

⟵ A_n^p é o número total das maneiras diferentes possíveis de escolher p elementos dentre n elementos e permutar os p elementos entre si. Quando interessa a ordem, trata-se de um arranjo A_n^p.

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}_{p\text{factores}}$$

40.

Numa caixa contendo 20 pacotes de bolachas enumerados de um a vinte, extraiu-se um ao acaso. Qual é a probabilidade de o número do pacote extraído ser um divisor de 20?

A. $0,1$ B. $0,2$ C. $0,3$ D. $0,4$

2009. Extraordinário

【Resolução】

O conjunto dos divisores de 20 é: $\{1; 2; 4; 5; 10; 20\}$

Então, o número de casos favoráveis é 6.

⟵ Os elementos do conjunto $\{1; 2; 4; 5; 10; 20\}$ são 6.

O número de casos possíveis é 20.

Por isso, a probabilidade procurada é: $\dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10} = 0,3$

⟵ Probabilidade= $\dfrac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$

Opção: C

FIM

República de Moçambique

Matemática | **Ministério de Educação e Cultura** | **1ª Época**

12ª Classe / 2009 | **Conselho Nacional de Exames, Certificação e Equivalências** | **120 Minutos**

Esta prova contém 40 perguntas com 4 alternativas de resposta para cada uma. Escolha a alternativa correcta e *RISQUE* a letra correspondente na sua folha de respostas.

【Resolução】

1.

Qual é o ponto do eixo das abcissas, equidistante dos pontos $A(-2;2)$ e $B(2;6)$?

A. $(4;0)$ B. $(3;0)$ C. $(2;0)$ D. $(-4;0)$

2009.1ªÉpoca

【Resolução】

Como o ponto pedido pertence ao eixo das abcissas, o ponto pode ser representado por $P(x,0)$.

Como $\overline{AP} = \overline{BP}$, tem-se:

$$\sqrt{[x-(-2)]^2+(0-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(0-6)^2}$$

Elevando ambos os membro ao quadrado, tem-se

$$(x+2)^2+4=(x-2)^2+36$$
$$\Leftrightarrow x^2+4x+4+4=x^2-4x+4+36$$
$$\Leftrightarrow 8x=32 \Leftrightarrow 3x=4$$

Portanto, o ponto pedido é $(4,0)$.

Opção: A

⟵ A distância entre dois ponots (x_1,y_1) e (x_2,y_2) é $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

⟵ $\sqrt{A}=\sqrt{B} \Longleftrightarrow A=B$

2.

Qual é o coeficiente angular da recta que passa pelos pontos $A(1;4)$ e $B(0;1)$?

A. -3 B. 3 C. $\frac{1}{4}$ D. 4

2009.1ªÉpoca

【Resolução】

Como a recta passa pelos $(1;4)$ e $(0;1)$,

então o coeficiente angular é: $\frac{1-4}{0-1}=\frac{-3}{-1}=3$

Opção: B

⟵ O coeficiente angular da recta que passa pelos dois pontos (x_1,y_1) e (x_2,y_2) é $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\left(\Leftarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$

3.

Qual é a distância do ponto $(1;-1)$ à recta de equação $y-3x+8=0$?

A. $\sqrt{10}$ B. $\frac{3\sqrt{10}}{7}$ C. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

2009.1ªÉpoca

【Resolução】

$y-3x+8=0 \Leftrightarrow -3x+y+8=0$

Então a distância do ponto $(1;-1)$ á recta $-3x+y+8=0$ é:

$$\frac{|-3\cdot 1+(-1)+8|}{\sqrt{(-3)^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{10}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

Opção: D

⟵ Para utilizar a fórmula da distâcia de um ponto a uma recta, transforma-se a equação da recta na forma $ax+by+c=0$.

⟵ A distância do ponto (x_1,y_1) à recta da equação $ax+by+c=0$ é $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

4.
Qual é a alternativa correcta?

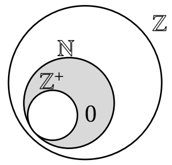
A. O conjunto $\mathbb{Z}$ é subconjunto de $\mathbb{N}$
B. Se $B \subset \mathbb{N}$, então $B \subset \mathbb{Z}^+$
C. Se $A \subset \mathbb{N}$, então $A \subset \mathbb{Z}$
D. Se $A \subset \mathbb{Z}$ e $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, então $A = \mathbb{N}$

2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

A opcão A não é correcta porque $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
A opcão B não é correcta porque $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{N}$.
A opcão C é correcta porque $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
A opcão D é não é correcta.

Opção: C



$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$
$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
Então, $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

5.
Sendo $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $M = \{1, 2\}$, $N = \{2, 3, 4\}$ e $P = \{4, 5\}$, então a que é igual $(U \setminus M) \cap (N \cup P)$?

A. $\{1, 3, 4, 5\}$ B. $\{3, 4, 5\}$ C. $\{3\}$ D. $\{\ \}$

2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

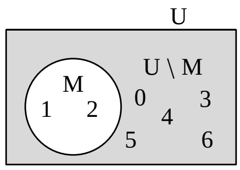
Calcula-se:

$U \setminus M = \{0, 3, 4, 5, 6\}$ e $N \cup P = \{2, 3, 4, 5\}$

Então, tem-se:

$(U \setminus M) \cap (N \cup P) = \{0, 3, 4, 5, 6\} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{3, 4, 5\}$

Opção: B



$U \setminus M = \overline{M}$

6.
Uma prova contendo dois problemas foi dada a 200 alunos. Sabe-se que:

- 50 Alunos acertaram os dois problemas;
- 100 Alunos acertaram o 1° problema;
- 99 Alunos acertaram o 2° problema;

Qual é o número de alunos que erraram os dois problemas?

A. 51 alunos B. 50 alunos C. 49 alunos D. 1 aluno

2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Sejam:

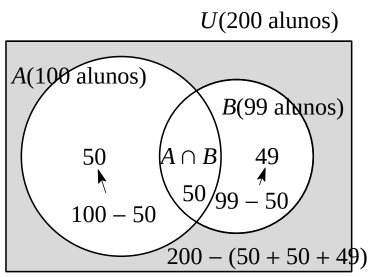
U- Todos alunos que fizeram a prova;
A - Alunos que acertaram o 1° problema;
B - Alunos que acertaram o 2° problem:

Então, como 50 alunos acertaram os dois problemas e 100 alunos acertaram o 1° problema, então os alunos que acertaram somente o 1° problema são: $100 - 50 = 50$.
De modo igual, como 50 alunos acertaram os dois problemas e 99 alunos acertaram o 2° problema, então os alunos que acertaram somente o 2° problema são: $99 - 50 = 49$.
Por isso, o número de alunos que erraram os dois problemas é:

$200 - (50 + 50 + 49) = 200 - 149 = 51$

Opção: A

⟵ Nota-se que:
$n(A \cap B) = 50$; $n(A) = 100$; $n(B) = 99$



7.
Qual das fracções é equivalente a expressão $\dfrac{a - a^2}{a^3 - 1}$?

A. $-\dfrac{a}{a - 1}$ B. $\dfrac{a}{a^2 + a + 1}$ C. $-\dfrac{a}{a^2 + a + 1}$ D. $-\dfrac{a}{a^2 + 1}$

2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$$\frac{a-a^2}{a^3-1}=\frac{a(1-a)}{(a-1)(a^2+a+1)}$$

$$=\frac{-a\cancel{(a-1)}}{\cancel{(a-1)}(a^2+a+1)}=-\frac{a}{a^2+a+1}$$

Opção: C

⟵ $a-a^2=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot a=\boldsymbol{a}(1-a)$;
$a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$ aplicando $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

⟵ $1-a=-a+1=-(a-1)$

8.

Dados os polinómios $P_1(x)=5x^4+3x^3+2x-1$ e $P_2(x)=-5x^4-3x^3+2x+5$. Qual é o grau do polinómio $P_1(x)+P_2(x)$?

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$P_1(x)+P_2(x)=5x^4+3x^3+2x-1+(-5x^4-3x^3+2x+5)$
$=4x+4$

Logo, o grau do polinónmio $P_1(x)+P_2(x)$ é 1.

Opção: D

⟵ O grau de um polinómio $P(x)$ é o maior grau de dos seus monómios do polinómio.

9.

O quociente e o resto da divisão de $P(x)=x^4+x^2+1$ por $D(x)=x^2-x+1$ são respectivamente:

A. x^2+x e x B. $-x^2-x-1$ e $-x+1$ C. x^2+x+1 e 0 D. x^2-x e $x-1$

2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$P(x)$ $\qquad$ $D(x)$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 & x^4+0\cdot x^3+x^2+0\cdot x+1 & & & & x^2-x+1 \\ \cline{6-6}
- & x^4\;-x^3+x^2 & & & & \underbrace{x^2+x+1}_{\text{Quociente}} \\ \cline{1-5}
 & x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+1 & & & & \\
- & x^3\;-x^2\;+x & & & & \\ \cline{1-5}
 & x^2-x+1 & & & & \\
- & x^2-x+1 & & & & \\ \cline{1-5}
 & 0 & & & &
\end{array}$$

Resto

Logo, o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $D(x)$ são respectivamente x^2+x+1 e 0.

Opção: C

⟵ Cálculo auxiliar:
$\frac{x^4}{x^2}=x^2$; $\quad\frac{x^3}{x^2}=1$; $\quad\frac{x^2}{x^2}=1$

10.

Sabendo que $9^x-3^x=72$, qual é o valor numérico de x^2+5?

A. 9 B. 12 C. 14 D. 86

2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$9^x-3^x=72\Leftrightarrow(3^x)^2-3^x-72=0$.

Fazendo $3^x=t$, se $t>0$, a equação fica:

$$t^2-t-72=0\Leftrightarrow(t-9)(t+8)=0\Leftrightarrow t=9\vee t=-8$$

Como $t>0$, a solução da equação é $t=9$.

Como $t=3^x$, tem-se:

$$3^x=9\Leftrightarrow 3^x=3^2\Leftrightarrow x=2$$

Substituindo x por 2 em x^2+5, tem-se:

$$x^2+5=2^2+5=9$$

Opção: A

⟵ $9^x=(3^2)^x=3^{2x}=3^{x\cdot 2}=(3^x)^2$

⟵ O contradomínio da função exponencial $y=a^x(a>0, a\neq 1)$ é $\mathbb{R}^+$. Neste caso, como $a^x>0$, $t>0$.

⟵ $t=-8$ não é solução porque não satisfaz a condição $t>0$

⟵ Iguala-se os expoentes porque as bases de ambos os membros da euqção são iguais, isto é:
$a^p=a^q\Leftrightarrow p=q$

11.

Observa a tabela.
Qual é o valor aproximado da média aritmética?

Classes	x_i	f_i
[0,14[	7	8
[14,28[	21	12
[28,42[	35	6
[42,56[	49	5
[56,70[	63	3
[70,84[	77	2

A. $28,4$

B. $30,7$

C. $35,1$

D. $37,2$

2009.1ªÉpoca

【Resolução】

A média aritmética é:

$$\overline{x} = \frac{7\cdot 8 + 21\cdot 12 + 35\cdot 6 + 49\cdot 5 + 63\cdot 3 + 77\cdot 2}{8+12+6+5+3+2}$$

$$= \frac{1106}{36} = 30,722\cdots$$

Opção: B

⟵ A média aritmética é dada por:
$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$, onde $\sum$ é o somatório, f_i é a frequência e os valores x_i são os pontos médios das classes dadas.

12.

Se x é um arco do 2°quadrante e sen$x = \frac{2}{3}$, qual é o valor de $\cos x$?

A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ B. 1 C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$

2009.1ªÉpoca

【Resolução】

Substituindo sen$x$ por $\frac{2}{3}$ na fórmula fundamental de trigonometria $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, tem-se:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Como x é um arco do 2°quadrante, $\cos x < 0$.

Por isso, tem-se: $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Opção: D

⟵ **<Relações trigonométricas do mesmo ângulo>**

1. $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ **2.** $\text{tg}\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$

3. $1 + \text{tg}^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

<Sinal das razões trigonométricas>

⟵

α	1° Q	2° Q	3° Q	4° Q
senα	+	+	-	-
$\cos\alpha$	+	-	-	+
tgα	+	-	+	-
cotgα	+	-	+	-

13.

Qual é o valor de $p \in \mathbb{R}^+$, que satisfaz a equação $|3p+1| = |p+3|$?

A. 2 B. 1 C. 0 D. -1

2009.1ªÉpoca

【Resolução】

Como $p > 0$, é claro que: $3p+1 > 0$; $p+3 > 0$

Portanto, tem-se: $|3p+1| = 3p+1$; $|p+3| = p+3$.

Então, a equação fica: $3p+1 = p+3 \Leftrightarrow 2p = 2 \Leftrightarrow p = 1$

Opção: B

⟵ **Definição de módulo**: $|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$

【Outra resolução】

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, tem-se:

$$|3p+1|^2 = |p+3|^2 \Leftrightarrow (3p+1)^2 = (p+3)^2$$
$$\Leftrightarrow 9p^2 + 6p + 1 = p^2 + 6p + 9$$
$$\Leftrightarrow 8p^2 - 8p = 0 \Leftrightarrow p^2 - p = 0$$
$$\Leftrightarrow p(p-1) = 0 \Leftrightarrow p = 0 \vee p = 1$$

Como $p > 0$, a solução é $p = 1$.

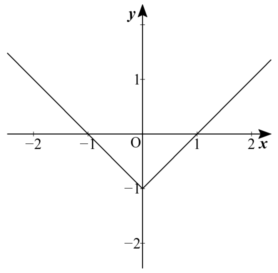
⟵ $|A| = |B| \Longleftrightarrow |A|^2 = |B|^2$

⟵ Como $p = 0 \notin \mathbb{R}^+$, $p = 0$ não é solução.

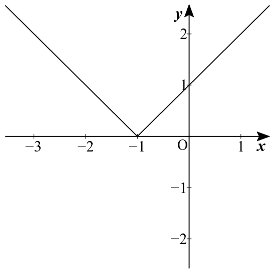
14.

Qual é o esboço do gráfico da fução $y = \big||x| - 1\big|$?

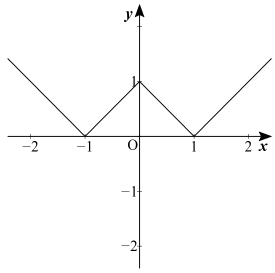
A.



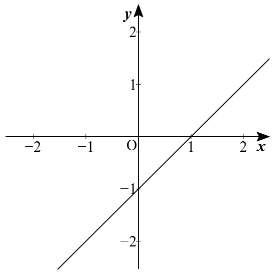
B.



C.



D.



2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

O gráfico de $y = |x| - \mathbf{1}$ obtém-se a partir do gráfico de $y = |x|$ através da translação de **1** unidade para **baixo**. Então, o gráficco da função $y = |x| - 1$ é da opção A.

E o gráfico da função $y = \big||x| - 1\big|$ obtém-se a partir do gráfico de $y = |x| - 1$ passando os pontos de ordenada negativa do gráfico para cima do eixo das abcissa.

Por isso, O gráfico de $y = \big||x| - 1\big|$ é da opção C.

Opção: C

【**Outra resolução**】

Substituindo x por 0 em $y = \big||x| - 1\big|$, então:

$$y = \big||0| - 1\big| = |-1| = 1$$

Por isso, o gráfico de $y = \big||x| - 1\big|$ passa pelo ponto $(0, 1)$. Logo a solução é a opção B ou C.

Substituindo x por 1 em $y = \big||x| - 1\big|$ da mesma maneira, então:

$$y = \big||1| - 1\big| = |0| = 0$$

Logo, tambem passa pelo ponto $(1, 0)$.

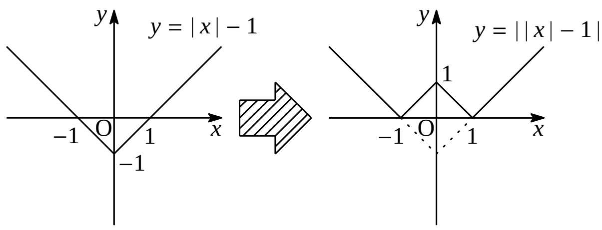
Conclui-se que apenas o gráfico da opção C passa pelos dois pontos $(0, 1)$ e $(1, 0)$.

Por isso, a solução é a opção C.

⟵ O gráfico da função $y = f(x - \boldsymbol{p}) + \boldsymbol{q}$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = f(x)$ através da translação de ***p* unidades para direita** e ***q* unidades para cima**.

⟵ O gráfico de uma função $y = |f(x)|$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = f(x)$, passando os pontos de ordenada negativa do gráfico para cima do eixo das abcissas.

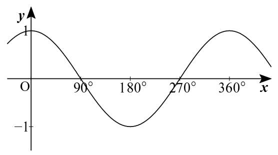
O gráfico de uma função $y = f(|x|)$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = f(x)$ através da simetria em relação ao eixo das ordenadas, representando os pontos que estão à direita do eixo das ordenadas à esquerda do mesmo eixo.



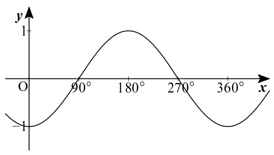
15.

Qual é o gráfico da fução $y = \cos\theta$?

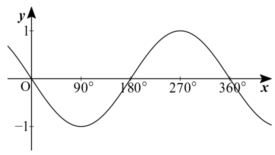
A.



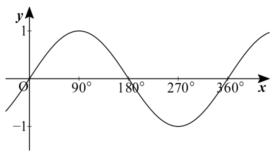
B.



C.



D.



2009.1ªÉpoca

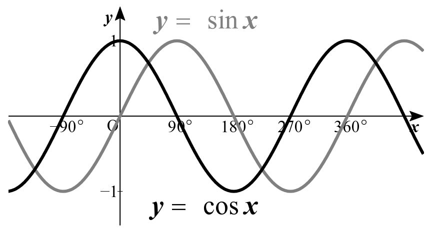
【**Resolução**】

Como o gráfico da função $y = \cos\theta$ passa pelos pontos seguintes:

$(0°, 1)$, $(90°, 0)$, $(180°, -1)$ e $(270°, 0)$

Então, a solução é a opção A.

Opção: A



16.

Qual é o domínio da função $f(x) = \dfrac{-8}{x^2-4}$?

A. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ B. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 4\}$ C. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\sqrt{2}\right\}$ D. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Como o denominador é diferente de zero, tem-se a condição:

$$x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \wedge x \neq -2$$

Por isso, o domínio da função de $f(x)$ é $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

Opção: D

⟵ Uma expressão algébrica racional fraccionária $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tem a condição $g(x) \neq 0$.

17.

Qual é o contradomínio da função $f(x) = 5\cos(10x)$?

A. $\mathbb{R}$ B. $[-5; 5]$ C. $[-2; 2]$ D. $[-10; 10]$

2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Sabe-se que: $-1 \leq \cos(10x) \leq 1$

Multiplicando todos os membros da inequação por 5, tem-se:

$$-5 \leq 5\cos(10x) \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq f(x) \leq 5$$

Por isso, o contradoménio de f é: $[-5; 5]$.

Opção: B

⟵ **Contradomínio de funções trigonométricas:**

★ $-1 \leq \operatorname{sen} f(x) \leq 1$

★ $-1 \leq \cos f(x) \leq 1$

★ $-\infty \leq \operatorname{tg} f(x) \leq +\infty$

18.

Se f e g são funções reais de variável real dadas por $f(x) = 3x+4$ e $g(x) = \log_3 x$, qual é o valor de $(gof)(-1)$?

A. 2 B. 1 C. 0 D. -1

2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Calcula-se $f(-1)$: $f(-1) = 3 \cdot (-1) + 4 = 1$

Por isso , tem-se:

$$(gof)(-1) = g[\boldsymbol{f(-1)}] = g(\mathbf{1})$$
$$= \log_3 1 = \log_3 3^0 = 0$$

Opção: C

⟵ Substitui-se x por -1 em $f(x) = 3x + 4$.

⟵ **Função composta: $(gof)(x) = g[f(x)]$**

⟵ Obtém-se $g(1)$ substituindo x por 1 em $g(x) = \log_3 x$.

★$\mathbf{\log_a 1} = \log_a a^0 = \mathbf{0}$

19.

Uma função $y = f(x)$ é par, $\forall x \in \mathbb{R}$ se...

A. $f(x) = f(x^2)$ B. $f(x) = f^{-1}(x)$ C. $f(x) = -f(x)$ D. $f(x) = f(-x)$

2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Uma função $y = f(x)$ é par, $\forall x \in \mathbb{R}$ se $f(x) = f(-x)$

Opção: D

⟵ Uma função $y = f(x)$ é ímpar, $\forall x \in \mathbb{R}$ se $f(x) = -f(-x)$.

20.

Na sucessão de números ímpares a que é igual o termo de ordem 135?

A. 269 B. 260 C. 169 D. 135

2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

A sucessão de números ímpares é $(1; 3; 5; 7; 9; \ldots)$.

Como a diferença entre dois termos consecutivos é constante 2, esta sucessão é uma PA em que $a_1 = 1$ e $d = 2$.

Então, o termo geral desta PA é:

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$$

Por isso, o termo de ordem 135 é: $a_{135} = 2 \cdot 135 - 1 = 269$

Opção: A

⟵ 1, 3, 5, 7, 9, ...
+2 +2 +2 +2 +2

⟵ O termo geral de uma **PA** é $a_n = a_1 + (n-1)d$.
O termo geral de uma **PG** é $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

⟵ Substitui-se $n = 135$ em $a_n = 2n - 1$

21.

O primeiro termo de uma progressão aritmética é −10 e a soma dos oito primeiros termos é 60. Qual é a diferença dessa progressão?

A. 15 B. 10 C. 6 D. 5

2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Pela condição, tem-se: $a_1 = -10$ e $S_8 = 60$.
Calcula-se a soma dos oito primeiros termos:

$$S_8 = \frac{8[2(-10) + (8-1)d]}{2} = 4(-20 + 7d) = -80 + 28d$$

Como $S_8 = 60$, tem-se: $-80+28d = 60 \Leftrightarrow 28d = 140 \Leftrightarrow d = 5$

Opção: D

⟵ A soma dos n primeiros termos de uma PA é:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \text{ ou } S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$$

22.

Qual é a soma de todos os termos da progressão 16; 8; 4; . . . ?

A. 28 B. 30 C. 32 D. 34

2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

O quociente entre dois termos consecutivos é constante $\frac{1}{2}$.

Logo, esta sucessão é uma PG em que $a_1 = 16$ e $q = \frac{1}{2}$.

Como $|q| < 1$, a soma de todos os termos desta PG é:

$$16 + 8 + 4 + \cdots = \frac{16}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{16}{\frac{1}{2}} = 32$$

Opção: C

⟵ $16, \; 8, \; 4, \; \ldots$ $\quad \times\frac{1}{2} \quad \times\frac{1}{2} \quad \times\frac{1}{2}$

⟵ A soma de todos os termos de uma PG com $|q| < 1$ é dada por: $\boldsymbol{S = \frac{a_1}{1-q}}$.

23.

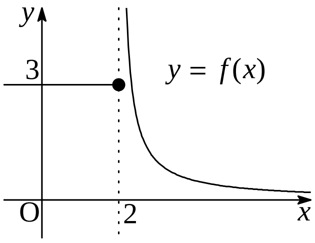
A figura representa o gráfico de uma função $y = f(x)$. Qual é o valor de $\lim_{x\to 2^+} f(x)$?

A. 3

B. $+\infty$

C. Não existe.

D. 2



2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

A partir da figura, nota-se que quando x se aproxima de 2 pela direita, $f(x)$ tende para $+\infty$.
Por isso, tem-se: $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

Opção: B

⟵ Quando x se aproxima de a pela direita, $f(x)$ aproxima-se de α. Escreve-se: $\lim_{x\to a^+} f(x) = \alpha$.

Quando x se aproxima de a pela esquerda, $f(x)$ aproxima-se de α. Escreve-se: $\lim_{x\to a^-} f(x) = \alpha$.

24.

Qual é o valor de $\lim_{x\to 5} \log_2(2x + 6)$?

A. 4 B. 10 C. 16 D. 2^{16}

2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$$\lim_{x\to 5} \log_2(2x+6) = \log_2(2\cdot 5 + 6)$$
$$= \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$$

Opção: A

⟵ Substitui-se x por 5.

⟵ $\log_a a^p = p$

25.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$?

A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

2009.1ªÉpoca

【Resolução】

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x-2)}{\cancel{(x-3)}}$$

⟵ Factoriza-se $x^2 - 5x + 6$ aplicando $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$.

$$= \lim_{x \to 3}(x - 2)$$

$$= 3 - 2 = 1$$

⟵ Substitui-se x por 3.

Opção: C

26.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$?

A. 0 B. $\dfrac{1}{4}$ C. 1 D. $\sqrt{2}$

2009.1ªÉpoca

【Resolução】

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2}$$

⟵ Multiplica-se pelo conjugado $\sqrt{x+2}+2$ de $\sqrt{x+1}-2$ o numerador e o denominador.

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2) - 4}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)}$$

⟵ $(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2) = (\sqrt{x+2})^2 - 2^2$ aplicando $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x+2} + 2)}$$

⟵ Simplifica-se a fracção.

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2+2} + 2} = \frac{1}{4}$$

⟵ Substitui-se x por 2.

Opção: B

27.

Qual é a equação da assípmtota vertical do gráfico da função $g(x) = x + \dfrac{2}{x}$?

A. $x = 2$ B. $x = 0$ C. $x = -2$ D. Não tem assímptota

2009.1ªÉpoca

【Resolução】

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -\infty$,
então $x = 0$ é uma assímptota vertical do gráfico de $g(x)$.

Opção: B

⟵ A recta $x = a$, com $a \in \mathbb{R}$ é uma assímptota vertical (**AV**) do gráfico da função $y = f(x)$ se:

★ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)

ou

★ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)

【Outra resolução】

O zero do denominador é $x = 0$ e este não anula o numerador. Por isso, conclui-se que $x = 0$ é uma assímptota vertical do gráfico de $g(x)$.

⟵ Toda a função racional fraccionária, $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, tem **AV**: $x = a$ se a for zero do denominador, isto é, $g(a) = 0$, e não anular o numerador, isto é, $f(a) \neq 0$.

28.

Qual é a equação da assímptota horizontal do gráfico da função $h(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 4x + 3}$?

A. $y = 0$ B. $y = 2$ C. $y = 3$ D. Não tem assímptota

2009.1ªÉpoca

【Resolução】

Calcula-se os limites de $h(x)$ quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2-4x+3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x-1}{x^2}}{\frac{(x-1)(x-3)}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

$$= \frac{0}{1} = 0$$

De igual modo, tem-se:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 0$, $y = 0$ é uma AH de $h(x)$.

Opção: A

⟵ Levanta-se a indeterminação do tipo , $\frac{\infty}{\infty}$ dividindo pela potência máxima do denominador.

★Outro caminho do cálculo deste limite:
Como o grau do numerador é menor do que o grau do denominador, então $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^2-4x+3} = 0$

Em geral, se o grau do numerador de uma expressão algébrica racional fraccionária é menor que o grau do denominador da expressão, então o limite da expressão quando $x \to \infty$ é igual a zero.

⟵ A recta da equação $y = b$ é **assímptota horizontal** do grá fico da função $y = f(x)$ se e só se:
★ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ ou ★ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$

29.

Para qua a função $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & \text{se } x < 1 \\ kx, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ seja contínua no ponto $x = 1$, qual deve ser o valor de k?

A. -1 B. 1 C. 0 D. 2

2009.1ªÉpoca

【Resolução】

Para que a função seja contínua em $x = 1$, é necessário que:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = f(1)$$

O limite lateral de $f(x)$ à esquerda de $x = 1$ é:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} 2(x-1) = 2(1-1) = \mathbf{0}$$

O limite lateral de $f(x)$ à direita de $x = 1$ é:

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} kx = k\cdot 1 = \boldsymbol{k}$$

O valor de $f(x)$ no ponto $x = 1$ é: $f(1) = k\cdot 1 = \boldsymbol{k}$

Como estes valores são iguais, tem-se: $\boldsymbol{k = 0}$

Opção: C

⟵ $f(x)$ é contínua no ponto de abcissa $x = a$
$\iff \exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
$\iff \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

⟵ Quando $x \to 1^-$, isto é, $x < 1$, $f(x) = 2(x-1)$.

⟵ Quando $x \to 1^+$, isto é, $x > 1$, $f(x) = kx$.

⟵ Quando $x = 1$, $f(x) = kx$.

30.

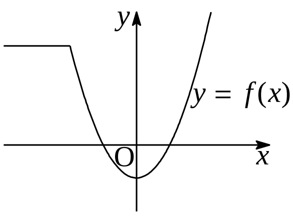
Observa a figura. Qual é o valor de $f'(0)$?

A. 0

B. 1

C. $+\infty$

D. Não existe



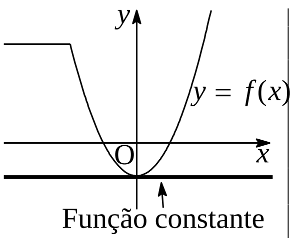
2009.1ªÉpoca

【Resolução】

$f'(0)$ é igual ao declive da equação da recta tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ em $x = 0$.

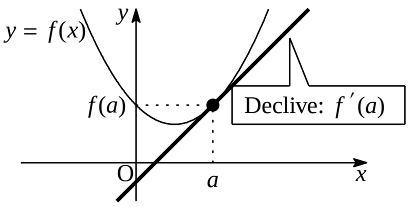
A partir da figura, a recta tangente em $x = 0$ é uma função constante.

Como o declive de toda a função constante é zero, então tem-se: $f'(0) = 0$



Opção: A

⟵ O **declive** da equação da recta tangente ao gráfico de uma função $y = f(x)$ em $\boldsymbol{x = a}$ é igual a $\boldsymbol{f'(a)}$.



31.

Sendo $h(x) = \dfrac{1}{x^3}$, qual é o valor de $h'(1)$?

A 1 B $\dfrac{1}{3}$ C -3 D -4

2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$$h'(x) = \left(\frac{1}{x^3}\right)' = (x^{-3})' = -3x^{-3+1} = -3x^{-2} = -\frac{3}{x^2}$$

⟵ ★ $(x^n)' = nx^{n-1}, \forall n \in \mathbb{R}$; ★ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Logo, tem-se: $h'(1) = -\dfrac{3}{1^2} = -3$

⟵ Substitui-se x por 1 em $h'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$

Opção: C

32.

Qual é a derivada da função $y = \text{sen}(2x-3)$?

A $y' = 2\text{sen}(2x-3)$ B $y' = -\text{sen}(2x-3)$

C $y' = (2x-3)\cos(2x-3)$ D $y' = 2\cos(2x-3)$

2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$$\begin{aligned} y' = [\text{sen}(2x-3)]' &= \cos(2x-3)\cdot(2x-3)' \\ &= \cos(2x-3)\cdot 2 \\ &= 2\cos(2x-3) \end{aligned}$$

⟵ **Derivada de uma função composta**: $[\text{sen} f(x)]' = \cos f(x)\cdot f'(x)$ porque $(\text{sen}x)' = \cos x$.

Opção: D

33.

Qual é a derivada da função $f(x) = \dfrac{3x+5}{x-1}$?

A. $\dfrac{-8}{(x-1)^2}$ B. $\dfrac{2}{(x-1)^2}$ C. $\dfrac{6x-8}{(x-1)^2}$ D. $\dfrac{6x+2}{(x-1)^2}$

2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(\frac{3x+5}{x-1}\right)' &= \frac{(3x+5)'(x-1)-(3x+5)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3(x-1)-(3x+5)\cdot 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x-3-3x-5}{(x-1)^2} = \frac{-8}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

⟵ $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[f(x)]^2}$

⟵ $(3x+5)' = 3$; $(x-1)' = 1$

Opção: A

34.

Qual é a equação da recta tangente à curva da função $f(x) = x^2 - 2x + 7$ no ponto de abcissa $x = 0$?

A. $2x+y+7=0$ B. $2x+y-7=0$ C. $2x-y-7=0$ D. $x+y-7=0$

2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Começa-se por calcular $f'(x)$:

$$f'(x) = (x^2-2x+7)' = 2x-2$$

Então, o declive da recta tangente em $x=0$ é: $f'(0) = -2$

⟵ O declive da equação da recta tangente à curva de uma função $y = f(x)$ em $x = a$ é igual a $f'(a)$

Como $f(0) = 7$, o gráfico da recta tangente passa por $(0, 7)$.

Portanto, a equação da recta tangente em $x = 0$ é:

$$y - 7 = -2(x-0) \Leftrightarrow 2x+y-7=0$$

⟵ A equação da recta que passa pelo ponto $(x_1; y_1)$ e tem o declive m é dada por $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Opção: B

35.

Em qual dos intervalos a função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ é decrescente?

A. $]-\infty; 0[$ B. $]2; +\infty[$ C. $]0; 2[$ D. $]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$

2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

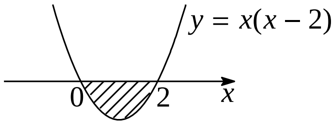
Para que $f(x)$ seja decrescente, é necessário que $f'(x) < 0$.
Como $f'(x) = 3x^2 - 6x$, então resolve-se a inequação:

$$3x^2 - 6x < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x < 0$$

Logo, $x(x-2) < 0$

Pela leitura da figura, tem-se:

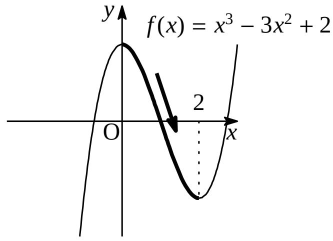
$$0 < x < 2$$



Opção: C

⟵ Uma função $y = f(x)$ é **crecente** se $\boldsymbol{f'(x) > 0}$.
Uma função $y = f(x)$ é **decrecente** se $\boldsymbol{f'(x) < 0}$.

O gráfico de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ representa-se:



【**Outra resolução**】

Determina-se $f'(x)$: $f'(x) = 3x^2 - 3 \cdot 2x + 0 = 3x^2 - 6x$

Calcula-se os zeros da derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

⟵ Há possibilidade de ter extremos para $x = 0$ ou $x = 2$.

Constroi-se a tabela de monotonia e extremos:

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	Máx	↘	Mín	↗

⟵ ★Se $f(x) < 0$, então $f(x)$ é decrescente.
★Se $f(x) > 0$, então $f(x)$ é crescente.
★Se $f(x) = 0$, então $f(x)$ é constante.

A partir da tabela, conclui-se que $f(x)$ é decrescente no intervalo $]0; 2[$.

36.

Qual é a ordenada do extremo máximo do gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$?

A. −2 B. −1 C. 0 D. 2

2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Observando a tabela da outra resolução do exercício anterior, nota-se que a função $f(x)$ tem para $x = 0$ um extremo máximo.
Logo, a ordenada do extremo máximo é: $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$

Opção: D

⟵ Se $\boldsymbol{f'(a) = 0}$ e $f'(x)$ passa no ponto $x = a$ de **negativa a positiva**, então $f(x)$ tem para $x = a$ um **mínimo** extremo. Se $\boldsymbol{f'(a) = 0}$ e $f'(x)$ passa no ponto $x = a$de **positiva a negativa**, então $f(x)$ tem para $x = a$ um **máximo** extremo.

37.

Considere as seguintes proposições:

p: 15 é um número primo.
q: 15 é um número ímpar.

Qual das seguintes proposições tem um valor lógico verdadeiro?

A. $\sim p$ B. $p \wedge q$ C. $p \vee q$ D. $p \Leftrightarrow q$

2009.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Como 15 não é um número primo mas é ímpar, tem-se:

***p* é falsa** e ***q* é verdadeira**.

⟵ Um número natural maior que 1 diz-se **primo** quando unicamente é divisível por si próprio e pela unidade, isto é, não possui nenhum divisor efectivo.

A. Como p é falsa, então $\sim p$ é verdadeira. ⟵ $\sim p$ tem o valor lógico do verso de p.
B. Como p é falsa e q é verdadeira, então $p \wedge q$ é falsa. ⟵ $p \wedge q$ só é verdadeira se p e q são verdadeiras.
C. Como p é falsa e q é verdadeira, então $p \vee q$ é verdadeira. ⟵ $p \vee q$ só é falsa se p e q são falsas.
D. Como p é falsa e q é verdadeira, então $p \Leftrightarrow q$ é falsa. ⟵ $p \Leftrightarrow q$ só é verdadeira se p e q têm o mesmo valor lógico.

Opção: A e C

38.

Sendo $A_n^2 = 30$, com $n > 2$, qual é o valor de n?

A $n = 13$ B $n = 11$ C $n = 10$ D $n = 6$

2009.1ªÉpoca

【Resolução】

$A_n^2 = 30 \Leftrightarrow n(n-1) = 30 \Leftrightarrow n^2 - n - 30 = 0$

$\Leftrightarrow (n-6)(n+5) = 0 \Leftrightarrow n = 6 \vee n = -5$

Pela condição $n > 2$, a solução procurada é $n = 6$.

Opção: D

⟵ $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ factores}}$

⟵ $n = -5$ não é solução porque não satisfaz a condição $n > 2$.

39.

Numa cidade, 4 ruas estão sem nome. Existem 6 nomes para serem atribuídos a essas ruas. De quantas maneiras diferentes pode ser feita a referida atribuição?

A. 720 B. 360 C. 24 D. 15

2009.1ªÉpoca

【Resolução】

Deseja-se o número total das maneiras diferentes possíveis de escolher 4 elementos dentre 6 elementos e permutar os 4 elementos entre si.

Como interessa a ordem, trata-se de um arranjo de 6 elementos tomados 4 a 4.

Portanto, tem-se:

$$A_6^4 = \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}_{4 \text{ factores}} = 360$$

Opção: B

⟵ $\mathbf{A_n^p}$ é o número total das maneiras diferentes possiveis de **escolher** p elementos dentre n elementos e **permutar** os p elementos entre si. Se **interessa a ordem**, então aplica-se um arranjo $\mathbf{A_n^p}$ e se não interessa a ordem, então aplica-se uma combinação C_n^p.

⟵ $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ factores}}$

40.

Qual é a probabilidade de uma bola branca aparecer ao retirar uma única bola de uma urna contendo quatro bolas brancas, três vermelhas e cinco azuis?

A. $\dfrac{1}{2}$ B. $\dfrac{1}{3}$ C. $\dfrac{1}{4}$ D. $\dfrac{1}{12}$

2009.1ªÉpoca

【Resolução】

O número total das bolas da urna é: $4 + 3 + 5 = 12$

Então, o número de casos possíveis é C_{12}^1 porque escolhe uma bola dentre 12 bolas.

O número de casos favoráveis é C_4^1 porque escolhe uma bola branca dentre 4 bolas brancas.

Portanto, a probabilidade pedida é:

$$\frac{C_4^1}{C_{12}^1} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Opção: B

⟵ $\mathbf{C_n^p}$ é o número total das maneiras diferentes possíveis de **escolher** p elementos dentre n elementos. Quando **não interessa ordem, aplica-se uma combinação** C_n^p.

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}^{p \text{ factores}}}{p(p-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

★Caso especial: $C_n^1 = n$

⟵ A probabilidade de um acontecimento A é dada por:

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\textbf{número de casos favoráveis}}{\textbf{número de casos possíveis}}$$

FIM

República de Moçambique

Matemática | **Ministério de Educação e Cultura** | **2ª Época**

12ª Classe / 2009 | **Conselho Nacional de Exames, Certificação e Equivalências** | **120 Minutos**

Esta prova contém 40 perguntas com 4 alternativas de resposta para cada uma. Escolha a alternativa correcta e *RISQUE* a letra correspondente na sua folha de respostas.

【Resolução】

1.

Qual é o comprimento do vector $\vec{a} = (3; 4)$?

A. 3 B. 4 C. 5 D. 7

2009. 2ª época

【Resolução】

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Opção: C

⟵ O comprimento do vector $\vec{a} = (a_1; a_2)$ é dado por:
$|\vec{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}$

2.

Se o ponto $P(x; -3)$ é equidistante aos pontos $Q(-2; 1)$ e $R(1; 3)$, qual é o valor de x?

A. $\dfrac{17}{6}$ B. $\sqrt{\dfrac{17}{6}}$ C. 1 D. $\dfrac{6}{17}$

2009. 2ª época

【Resolução】

Pela condição, tem-se: $\overline{PQ} = \overline{PR}$

Logo; $\sqrt{(-2-x)^2 + [1-(-3)]^2} = \sqrt{(1-x)^2 + [3-(-3)]^2}$

$\Leftrightarrow (-2-x)^2 + 4^2 = (1-x)^2 + 6^2$

$\Leftrightarrow 4 + 4x + x^2 + 16 = 1 - 2x + x^2 + 36$

$\Leftrightarrow 6x = 17 \Leftrightarrow x = \dfrac{17}{6}$

Opção: A

⟵ A distância entre dois pontos $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$ é dada por:
$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

3.

Qual é a equação da recta que passa pelo ponto $(8; -2)$ e tem como declive $\dfrac{1}{2}$?

A. $y = \dfrac{1}{2}x + 3$ B. $y = \dfrac{1}{2}x - 2$ C. $y = \dfrac{1}{2}x + 2$ D. $y = \dfrac{1}{2}x - 6$

2009. 2ª época

【Resolução】

$y - (-2) = \dfrac{1}{2}(x - 8) \Leftrightarrow y + 2 = \dfrac{1}{2}x - 4 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}x - 6$

Opção: D

⟵ A equação da recta que passa por $(x_1; y_1)$ e tem o declive m é dada por: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

4.

Qual é a distância do ponto $(2; 3)$ à recta de equação $4y = 3x - 2$?

A. -4 B. $\dfrac{8}{5}$ C. 4 D. $\dfrac{5}{8}$

2009. 2ª época

【Resolução】

$4y = 3x - 2 \Leftrightarrow 3x - 4y - 2 = 0$

Então a distância do ponto $(2; 3)$ à recta $3x - 4y - 2 = 0$ é dada por: $d = \dfrac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{|-8|}{\sqrt{25}} = \dfrac{8}{5}$

Opção: B

⟵ Para utilizar a fórmula da distácia de um ponto a uma recta, transforma-se a equação da recta na forma $ax + by + c = 0$.

⟵ A distância do ponto (x_1, y_1) à recta da equação $ax + by + c = 0$ é $d = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

5.

Sendo $U = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, $M = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e $N = \{2, 5, 7\}$, qual dos conjuntos representa $\overline{M} \cap \overline{N}$?

A. $\{3, 9\}$ B. $\{1, 3, 9\}$ C. $\{1, 3, 4, \}$ D. $\{6, 7, 8, 9\}$

2009. 2ª época

【Resolução】

Determina-se $\overline{M}$ e $\overline{N}$:

$\overline{M} = U \setminus M = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, 5, 7, \mathbf{9}\}$

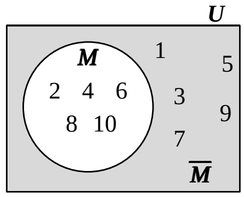
$\overline{N} = U \setminus N = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, 4, 6, 8, \mathbf{9}, 10\}$

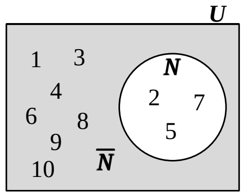
Por isso, tem-se:

$\overline{M} \cap \overline{N} = \{1, 3, 9\}$

Opção: B

$\overline{A}$ é o conjunto de todos os elementos que pertencem a U e não pentencem a A. Isto é $\overline{A} = U \setminus A$.





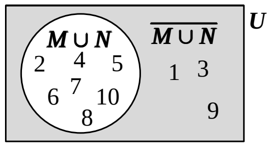
【Outra resolução】

Pelas leis de De Morgan, tem-se: $\overline{M} \cap \overline{N} = \overline{M \cup N}$

Como $U = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ e $M \cup N = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$, tem-se:

$\overline{M \cup N} = U \setminus M \cup N = \{1, 3, 9\}$

⟵Leis de De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



6.

Um vendedor de frutas perguntou a 120 pessoas acerca do tipo de frutas que gostam dentre Ananases (A), Bananas (B) e Cocos (C). O diagrama mostra o resultado do inquérito.

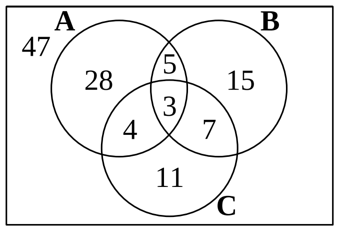
O vendedor tirou as seguintes conclusões:

I. 19 pessoas gostam apenas de 2 tipos de frutas.

II. 47 pessoas não gostam de nenhum tipo.

III. 3 pessoas gostam de ananases, bananas e cocos.

IV. 40 pessoas gostam de ananases.



Qual das conclusões é correcta? Somente...

A. I; II e III B. II e IV C. III e IV D. II; III e IV

2009. 2ª época

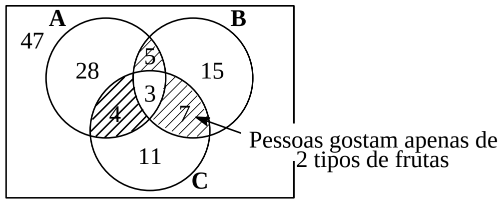
【Resolução】

A conclusão I não é correcta porque $4 + 5 + 7 = 16$ pessoas gostam apenas de 2 tipos de frutas.

Pela leitura do diagrama as conclusões II e III são correctas.

A conclusão IV é também correcta porque $28 + 4 + 3 + 5 = 40$.

Opção: D



7.

Qual é o nome que se dá a expressão $(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \cdots)$?

A. Equação B. Identidade C. Polinómio D. Variável

2009. 2ª época

【Resolução】

Como $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \cdots$ é a soma de monómios, então isto é um polinómio.

Opção: C

⟵ Se a expressão tivesse a igualdade, seria uma equação.

8.

Quais são as raízes de $x^3 - x^2 - 6x$?

A. -2, 0 e 3 B. -2, 1e 3 C. 0, 2 e 3 D. 1, 2 e 3

2009. 2ª época

【Resolução】

Resolve-se a equação $x^3 - x^2 - 6x = 0$.

$$x^3 - x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - x - 6) = 0$$
$$\Leftrightarrow x(x-3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3 \vee x = -2$$

Opção: A

⟵ Coloca-se o factor comum x em evidência.

⟵ Factoriza-se $x^2 - x - 6$ aplicando $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

9.

Se $xy = 2$ e $x + y = 5$, qual é o valor numérico de $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2$?

A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{25}{2}$

2009. 2ª época

【Resolução】

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2 = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} + \frac{2xy}{xy}$$
$$= \frac{x^2 + 2xy + y^2}{xy} = \frac{(x+y)^2}{xy}$$
$$= \frac{5^2}{2} = \frac{25}{2}$$

Opção: D

⟵ $m.m.c(x, y) = xy$

⟵ Factoriza-se $x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$ aplicando $a^+2ab+y^2 = (a+b)^2$.

⟵ Substitui-se $xy = 2$ e $x + y = 5$.

10.

Qual é a solução de $\log_2 x + \log_4 x = 1$?

A. $\sqrt[3]{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $\sqrt[3]{4}$ D. $2\sqrt[3]{2}$

2009. 2ª época

【Resolução】

Como o logritmando é positivo, tem-se a condição: $x > 0$

A partir da fórmula de mudança de base, tem-se:

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$$

Então, a equação fica:

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{2\log_2 x + \log_2 x}{2} = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{3\log_2 x}{2} = 1 \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 2^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{2}{3}}$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2^2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4}$$

Opção: C

⟵ A expressão logarítmica $\log_a x$ tem a codição $x > 0$.

⟵ Fórmula de mudança de base:
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

⟵ Ao resolver equações logarítmicas com bases diferentes, cria-se a condição de obter a mesma base através da fórmula de mudança de base.

⟵ Adopta-se $\log_2$ no segundo membro da equação e iguala-se os logaritmandos.

⟵ $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$ aplicando $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

11.

Qual dos seguintes conjuntos é igual a $Q = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x + 6 \leq 0\}$?

A. $[-3; -2]$ B. $]-3; -2]$ C. $]-\infty; -3] \cup [-2; +\infty[$ D. $]-\infty; -3[\cup]-2; +\infty[$

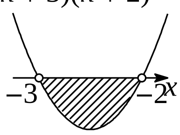
2009. 2ª época

【Resolução】

Resolve-se a inequação $x^2 + 5x + 6 \leq 0$:

$$x^2 + 5x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x+2) \leq 0$$
$$\Leftrightarrow -3 \leq x \leq -2$$
$$\Leftrightarrow x \in [-3; -2]$$

$y = (x+3)(x+2)$



Opção: A

⟵ A inequação $f(x) \leq 0$ significa o intervalo de x, incluindo os extremos, em que o gráfico de $y = f(x)$ está em baixo do eixo das abcissas.

A inequação $f(x) \geq 0$ significa o intervalo de x, incluindo os extremos, em que o gráfico de $f = f(x)$ está em cima do eixo das abcissas.

12.

A média aritmética de um grupo de 10 estudantes é de 68. Destes, 8 tiveram uma média de 73. Qual foi a média dos outros 2 estudantes?

A. 5 B. 48 C. 71 D. 96

2009. 2ª época

【Resolução】

A soma de todos os valores de 10 estudantes é: $68 \times 10 = 680$

A soma dos valores dos 8 estudantes é: $73 \times 8 = 584$

Por isso, a soma dos valores dos outros 2 estudantes deve ser:

$680 - 584 = 96$

Assim, a média aritmética dos outros 2 estudantes é: $\frac{96}{2} = 48$

Opção: B

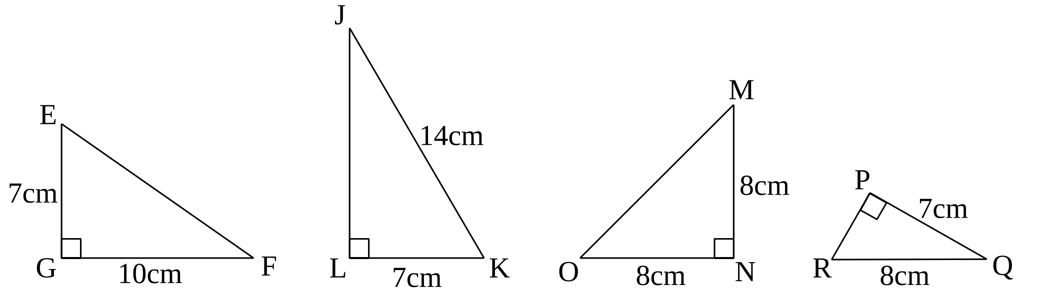
⟵ A média aritmética de 10 estudantes é 68.

⟵ A média aritmética de 8 é 73.

⟵ A média aritmética é o quociente da soma de todos os valores pelo número de estudantes.

13.

Qual das declarações acerca dos quatro triângulos rectângulos NÃO é verdadeira?



A. $\text{tg}F = 0.7$ B. Ângulo M= 45° C. $\cos Q = 0.875$ D. $\text{sen}K = \frac{1}{2}$

2009. 2ª época

【Resolução】

A opção D não é verdadeira pela seguinte razão.

Seja $x = \overline{JL}$ no segundo triângulo. Então tem-se: $\text{sen}K = \frac{x}{14}$

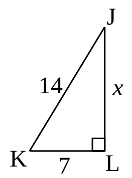
Pelo teorema de Pitágoras, tem-se:

$14^2 = x^2 + 7^2 \Leftrightarrow x^2 = 196 - 49 \Leftrightarrow x^2 = 147 \Leftrightarrow x = 7\sqrt{3}$

Logo, $\text{sen}K = \frac{7\sqrt{3}}{14} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Opção: D

⟵



$\text{sen}K = \frac{x}{14}$

$\cos K = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

$\text{tg}K = \frac{x}{7}$

⟵ Teorema de Pitágoras:
Em qualquer triângulalo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

14.

Se $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ e $\text{sen}\theta > 0$, qual é o valor de $\theta \in [0°; 360°]$?

A. 60° B. 120° C. 240° D. 300°

2009. 2ª época

【Resolução】

Como $\cos\theta < 0$ e $\text{sen}\theta > 0$, então θ pertence ao 2° quadrante.

Das opções dadas, somente 120° da opção B pertenece ao 2° quandrante.

Verifica-se $\cos 120° = -\frac{1}{2}$.

Por isso, tem-se: $\theta = 120°$.

Opção: B

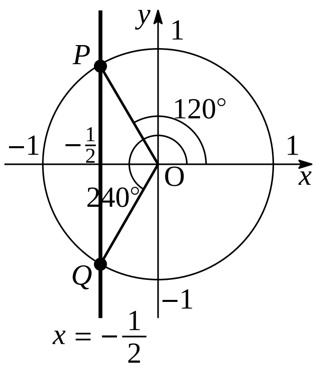
⟵ **<Sinal das razões trigonométricas>**

α	1° Q	2° Q	3° Q	4° Q
$\text{sen}\alpha$	+	+	-	-
$\cos\alpha$	+	-	-	+
$\text{tg}\alpha$	+	-	+	-
$\text{cotg}\alpha$	+	-	+	-

【Outra resolução】

Resolve-se $\cos\theta = -\frac{1}{2}$.

Sejam P e Q os pontos das intersecções da recta $x = -\frac{1}{2}$ com o círculo trigonométrico.



Como os ângulos procurados θ são os ângulos formados pelo segmento OP com o eixo das abcissas no sentido positivo e pelo segmento OQ com o eixo das abcissas no sentido positivo, tem-se:

$\theta = 120°$ e $\theta = 240°$

Como o ângulo θ é do 2° quadrante, tem-se $\theta = 120°$.

⟵ A solução da equação **cos**$\theta = \alpha$ é o ângulo formado pelo segmento OP com eixo das abcissas no sentido positivo, onde P é o ponto da intersecção da recta $\boldsymbol{x} = \alpha$ com o círculo trigonométrico.
A solução da equação **sen**$\theta = \alpha$ é o ângulo formado pelo segmento OP com o eixo das abcissas no sentido positivo, onde P é o ponto da intersecção da recta $\boldsymbol{y} = \alpha$ com o círculo trigonométrico.

15.

Considere as seguintes afirmações:

1. $\forall x; y \in \mathbb{R}; |x+y| \le |x| + |y|$ 2. $\forall x \in \mathbb{R};\ \sqrt{x^2} = x$ 3. $|x| = -x$; se $x < 0$

Quais destas declarações são verdadeiras?

A. 1 e 3 B. 1 e 2 C. 2 e 3 D. 1, 2 e 3

2009. 2ª época

【Resolução】

As afirmações 1 e 3 são verdadeiras mas a afrimação 2 é falsa porque: $\forall x \in \mathbb{R};\ \sqrt{x^2} = |x|$

Opção: A

⟵ $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \ge 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

16.

Qual é a solução da inequação $|x-2| < 5$?

A. $1 < x < 7$ B. $3 < x < 7$ C. $-3 < x < 7$ D. $-7 < x < -3$

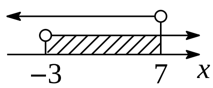
2009. 2ª época

【Resolução】

$|x-2| < 5 \Leftrightarrow x-2 < 5 \ \wedge\ x-2 > -5$

$\Leftrightarrow x < 7 \ \wedge\ x > -3$

$\Leftrightarrow -3 < x < 7$



Opção: C

⟵ **Inequações modulares:**
★$|x| < a \Leftrightarrow x < a \ \wedge\ x > -a$;
★$|x| > a \Leftrightarrow x > a \ \vee\ x < -a$

17.

Qual é a expressão equivalente a $x - \left|\frac{1-x}{2}\right|$, quando $x \le 1$?

A. $\frac{3x-1}{2}$ B. $\frac{2x-1}{2}$ C. $\frac{x+1}{2}$ D. $\frac{x-1}{2}$

2009. 2ª época

【Resolução】

$$x - \left|\frac{1-x}{2}\right| = \begin{cases} x - \frac{1-x}{2} & \text{se } 1-x \ge 0 \\ x - \left(-\frac{1-x}{2}\right) & \text{se } 1-x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2x-(1-x)}{2} & \text{se } x \le 1 \\ \frac{2x+1-x}{2} & \text{se } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} \boldsymbol{\frac{3x-1}{2}} & \textbf{se } \boldsymbol{x \le 1} \\ \frac{x+1}{2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Por isso, conclui-se que quando $x \le 1$, $x - \left|\frac{1-x}{2}\right| = \frac{3x-1}{2}$.

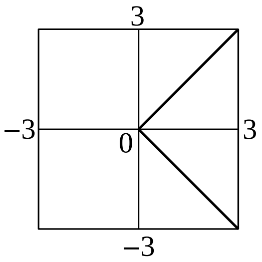
Opção: A

⟵ **Definição de módulo**: $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \ge 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

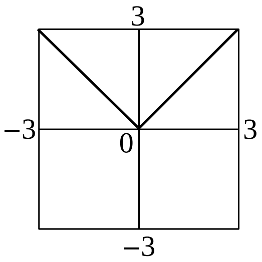
18.

Qual dos gráficos representa a função $y = |x|$?

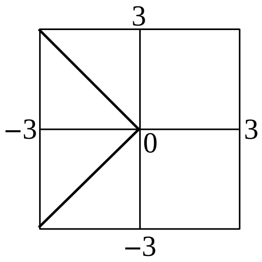
A.



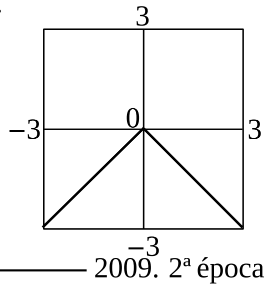
B.



C.



D.



2009. 2ª época

【**Resolução**】

Como o gráfico de $y = |x|$ passa pelos pontos $(3; 3)$ e $(-3; 3)$, isto é da opção B.

Opção: B

⟵ Quando $x = 3$, $y = |3| = 3$ e quando $x = -3$, $y = |-3| = 3$. Logo, o gráfico passa pelos pontos $(3; 3)$ e $(-3; 3)$.

19.

Quais das funcões $f(x) = x^2 + 5$ e $g(x) = 2x^3 - x$ são par ou ímpar?

	$f(x)$	$g(x)$
A.	par	par
B.	ímpar	par
C.	par	ímpar
D.	ímpar	ímpar

2009. 2ª época

【**Resolução**】

Calcula-se $f(-x)$ e $g(-x)$:

$f(-x) = (-x)^2 + 5 = x^2 + 5 = f(x)$; ⟵ Substitui-se x por $-x$ em $f(x)$.

$g(-x) = 2(-x)^3 - (-x) = -2x^3 + x = -g(x)$ ⟵ Substitui-se x por $-x$ em $g(x)$.

Por isso, conclui-se que $f(-x) = f(x)$ e $g(x) = -g(x)$.

Logo, f é par e g é ímpar.

Opção: C

⟵ Se $f(-x) = f(x)$, então f é par.
Se $f(-x) = -f(x)$, então f é ímpar.

20.

Qual das funções é bijectiva?

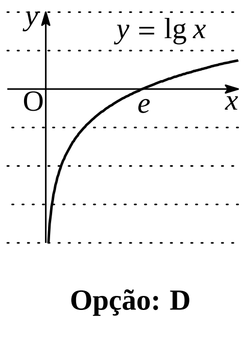
A. $y = \mathrm{tg}x$ B. $y = x^2$ C. $y = 2^x$ D. $y = \lg x$

2009. 2ª época

【**Resolução**】

O gráfico da função $y = \lg x$ da opção D representa-se como a figura mostra. Esta função é bijectiva porque cada uma das rectas paralelas ao eixo de xx corta o gráfico da função $y = \lg x$ em um só ponto.

Por isso, a solução é a opção D.



Opção: D

- ⋆ Se cada uma das rectas palalelas ao eixo de xx cortar o gráfico em **um só ponto ou não** cortar o gráfico de uma função, então a função será **injectiva**.
- ⋆ Se cada uma das rectas palalelas ao eixo de xx cortar o gráfico uma função em **um ou mais pontos**, então a função será **sobrejectiva**.
- ⋆ Se cada uma das rectas palalelas ao eixo de xx cortar o gráfico uma função em **um só ponto** , então a função será **bijectiva**. (Se uma função for simultaneamente injectiva e sobrejectiva, então a função será bijectiva.)

21.

Qual é a inversa e o domínio da função $f(x) = \dfrac{x+5}{x-2}$, $x \in \mathbb{R}$?

	Inversa	Domínio
A.	$\dfrac{x-2}{x+5}$	$x \in \mathbb{R} : x \neq 2$
B.	$\dfrac{x-2}{x+5}$	$x \in \mathbb{R} : x \neq -5$
C.	$\dfrac{2x+5}{x-2}$	$x \in \mathbb{R} : x \neq 5$
D.	$\dfrac{2x+5}{x-1}$	$x \in \mathbb{R} : x \neq 2$

2009. 2ª época

【**Resolução**】

O domínio da função é $x \neq 2$.

Substituindo $f(x)$ por y, tem-se: $y = \dfrac{x+5}{x-2}$

Resolve-se em ordem a x:

$$y = \frac{x+5}{x-2} \Leftrightarrow (x-2)y = x+5 \Leftrightarrow xy - 2y = x+5$$
$$\Leftrightarrow xy - x = 2y + 5 \Leftrightarrow x(y-1) = 2y+5 \Leftrightarrow x = \frac{2y+5}{y-1}$$

Trocando as variáveis x por y e y por x, tem-se $y = \dfrac{2x+5}{x-1}$, que é a função inversa pedida, $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+5}{x-1}$.

Opção: D

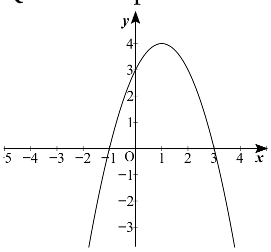
⟵ O denominador é diferente de 0

⟵ **Passos para se obter a expressão da função inversa**

1. Substitui-se $f(x)$ por y.
2. Resolve-se em ordem a x.
3. Trocam-se as variáveis x e y e y por x.

22.

Qual é a expressão analítica da função cujo gráfico está representado na figura?



A. $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

B. $f(x) = x^2 - 2x + 3$

C. $f(x) = -x^2 + 2x - 3$

D. $f(x) = x^2 + 2x - 3$

2009. 2ª época

【**Resolução**】

Como o gráfico é uma parábola, a função é do segundo grau e o seu ponto do vértice da parábola é $(1; 4)$.

Logo, a expressão analítica da função é dada por:

$$f(x) = a(x-1)^2 + 4, \text{ onde } a \in \mathbb{R}$$

Como o gráfico passa pelo ponto $(0; 3)$, tem-se: $f(0) = 3$

Por isso, $a(0-1)^2 + 4 = 3 \Leftrightarrow a = -1$

Então, a expressão da função é:

$$f(x) = -(x-1)^2 + 4 = -(x^2 - 2x + 1) + 4 = -x^2 + 2x + 3$$

Opção: A

⟵ O gráfico da função do 2° grau (função quadrática) representa-se por uma parábola.

⟵ Se $(p; q)$ são as coordenadas do vértice do gráfico de $f(x)$, então a expressão é escrita na forma: $f(x) = a(x-p)^2 + q$, onde $a \in \mathbb{R}$.

⟵ $f(0) = a(0-1)^2 + 4$

⟵ Substitui-se a por -1 em $f(x) = a(x-1)^2 + 4$.

【**Outra resolução**】

Como -1 e 3 são os zeros da função quadrática, a sua expressão analítica é dada por:

$$f(x) = a(x+1)(x-3), \text{ onde } a \in \mathbb{R}$$

Como $f(0) = 3$, tem-se: $a \cdot 1 \cdot (-3) = 3 \Leftrightarrow a = -1$

Por isso, tem-se: $f(x) = -(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3$.

⟵ A partir da figura, nota-se que o gráfico da função $f(x)$ intersecta o eixo das abcissas nos pontos $x = -1$ e $x = 3$.

⟵ $f(0) = a(0+1)(0-3)$

⟵ Substitui-se a por -1 em $f(x) = a(x+1)(x-3)$.

23.

As declarações abaixo foram deduzidas por um estudante para a expressão $g(x) = 3 + 5\text{sen}(2x - 4)$

1. O domínio de g é $]-\infty; +\infty[$
2. O contradomínio de g é $[-2; 8]$
3. O período de g é $\dfrac{\pi}{2}$
4. $g(2) = 3$

Quais das afirmações são correctas?

A. 1, 2 e 3   B. 1, 2 e 4   C. 1, 3 e 4   D. 2, 3 e 4

2009. 2ª época

【Resolução】

1. O domínio de g é $\mathbb{R}$. Por isso, a afirmação 1 é correcta.
2. Calcula-se o contradomínio de $g(x)$.
   Sabe-se que: $-1 \le \text{sen}(2x - 4) \le 1$.
   Então: $-5 \le 5\text{sen}(2x - 4) \le 5$.
   $\Leftrightarrow -5 + 3 \le \text{sen}(2x - 4) + 3 \le 5 + 3 \Leftrightarrow -2 \le g(x) \le 8$
   Por isso, é correcta.
3. Calcula-se o período de g.
   Como o coeficiente de x de $\text{sen}(\mathbf{2}x - 4)$ é $\mathbf{2}$, o período de $g(x)$ é: $\dfrac{2\pi}{|\mathbf{2}|} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$
   Por isso, não é correcta.
4. $g(2) = 3 + 5\text{sen}(2 \cdot 2 - 4) = 3 + 5\text{sen}0 = 3 + 5 \cdot 0 = 3$
   Por isso, é correcta.

Portanto, 1, 2 e 4 são as afirmações correctas.

Opção: B

⟵ O domínio da função de seno é $\mathbb{R}$.

⟵ O CD de seno é $[-1; 1] \Leftrightarrow -1 \le \text{sen} f(x) \le 1$

⟵ Multiplica-se por 5 todos os membros da inequação.

⟵ Adiciona-se 3 a todos os membros.

⟵ Seja $k \in \mathbb{R}$.

★ Os períodos de $y = \text{sen}kx$ e $y = \cos kx$ são $\dfrac{2\pi}{|k|}$.

★ O período de $y = \text{tg}kx$ é $\dfrac{\pi}{|k|}$.

24.

As funções f e g são definidas por $f(x) = 3x^2 - 1$ e $g(x) = x^2 + 2$. Qual é a expressão que define $f(g(x))$?

A. $4x^2 + 1$ B. $9x^4 + 1$ C. $3x^4 + 12x^2 + 11$ D. $3x^4 + 5x^2 - 2$

2009. 2ª época

【Resolução】

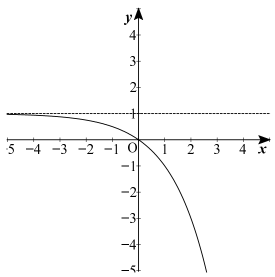
$$f(g(x)) = f(x^2 + 2) = 3(x^2 + 2)^2 - 1$$
$$= 3(x^4 + 4x^2 + 4) - 1 = 3x^4 + 12x^2 + 11$$

Opção: C

⟵ Para obter $f(x^2+2)$, substitui-se x por x^2+2 em $f(x) = 3x^2 - 1$.

25.

Qual é a expressão analítica da função representada pela figura?



A. $y = 2^x + 1$

B. $y = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^x + 1$

C. $y = -2^x + 1$

D. $y = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^x - 1$

2009. 2ª época

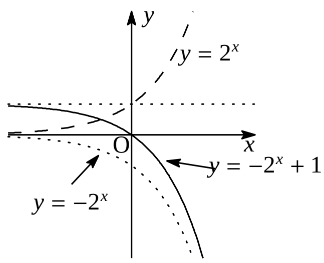
【Resolução】

Este gráfico obtém-se a partir do gráfico de $y = 2^x$ através da translação simétrica em relação ao exio das abcissas e translação de 1 unidade para cima.

Então, a expressão analítica da função representada pela figura deve ser: $y = -2^x + 1$.

Opção: C

⟵



26.

Qual é o termo geral da sucessão 5; 8; 11; 14; 17; . . . ?

A. $(n+1)^2+1$ B. $n+4$ C. $3n+1$ D. $3n+2$

2009. 2ª época

【**Resolução**】

Como a diferença entre dois termos consecutivos da sucessão é constante 3, esta é uma PA em que $a_1 = 5$ e $d = 3$

Logo, o termo geral é dado por: $a_n = 5 + (n-1)3 = 3n+2$

Opção: D

⟵ 5, 8, 11, 14, 17, . . .

+3 +3 +3 +3 +3

⟵ O termo geral de uma **PA** é $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$.

O termo geral de uma **PG** é $\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$.

27.

Uma progressão geométrica e uma aritmética ambas têm como 1° e 2° termos os números 2 e 6 respectivamente. Sabe-se que a progressão aritmética tem um termo que é igual ao 5° termo da progressão geométrica. Qual é a ordem desse termo?

A. 40 B. 41 C. 160 D. 162

2009. 2ª época

【**Resolução**】

Sejam a_n e b_n respectivamente uma PG e uma PA.

Determina-se o termo geral das sucessões a_n e b_n:

Como $a_1 = 2$ e $a_2 = 6$, a diferença da PA é: $6-2=4$.

Então o termo geral a_n da PA é dado por:

$$a_n = 2 + (n-1)\cdot 4 = 4n-2$$

Como $b_1 = 2$ e $b_2 = 6$, o quociente da PG é: $\dfrac{6}{2} = 3$.

Então o termo geral b_n da PG é dado por: $b_n = 2\cdot 3^{n-1}$

Assim, o 5° termo da PG é: $b_5 = 2\cdot 3^{5-1} = 2\cdot 81 = 162$

Resolvendo $a_n = 162$, tem-se:

$$4n-2 = 162 \Leftrightarrow 4n = 164 \Leftrightarrow n = 41$$

Opção: B

⟵ Uma PA é uma sucessão em que a diferença entre dois termos consecutivos é constante.

Uma PG é uma sucessão em que o quociente entre dois termos consecutivos é constante.

⟵ O termo geral de uma PA é dada por: $a_n = a_1 + (n-1)d$

⟵ O termo geral de uma PG é dado por: $a_n = a_1 q^{n-1}$

28.

Para que valores reais de x a função $y = \dfrac{x^2+3x+5}{x^2+3x-4}$ é contínua? Para todos os valores <u>EXCEPTO</u>:

A. -4 e 1 B. 1 e 4 C. -1 e -4 D. -1 e 4

2009. 2ª época

【**Resolução**】

O domínio da função é:

$$x^2+3x-4 \neq 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-1) \neq\Leftrightarrow x \neq -4 \wedge x \neq 1$$

Então, os valores de y não estão definidos nos pontos $x=-4$ e $x=1$, isto é, os valores de y não existem nesses pontos.

Por isso, a função é descontínua em $x=-4$ e $x=1$.

Logo, a função é contínua para todos os valores excepto -4 e 1.

Opção: A

⟵ O denominador tem que ser diferente de 0

⟵ f é contínua em $x = a \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Neste caso, como $\nexists f(-4)$ e $\nexists f(1)$, então não se pode dizer que $\lim\limits_{x\to -4} f(x) = f(-4)$ e $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

29.

Sabemos que a função $f(x) = \begin{cases} mx-3 \text{ se } x<1 \\ x^2+2 \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$ é contínua em $x=1$, qual é o valor da constante real m?

A. 6 B. 3 C. 2 D. 1

2009. 2ª época

【Resolução】

Para que a função seja contínua em $x = 1$, é necessário que:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = f(1)$$

⟵ $f(x)$ é contínua no ponto de abcissa $x = a$
$\iff \exists\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
$\iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

O limite lateral de $f(x)$ à esquerda de $x = 1$ é:

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} (mx - 3) = m \cdot 1 - 3 = \boldsymbol{m - 3}$$

⟵ Quando $x \to 1^-$, isto é, $x < 1$, $f(x) = mx - 3$.

O limite lateral de $f(x9$ à direita de $x = 1$ é:

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} (x^2 + 2) = 1^2 + 2 = \mathbf{3}$$

⟵ Quando $x \to 1^+$, isto é, $x \geq 1$, $f(x) = x^2 + 2$.

O valor de $f(x)$ no ponto $x = 1$ é: $f(x) = 1^2 + 2 = \mathbf{3}$

⟵ Quando $x = 1$, $f(x) = x^2 + 2$.

Como estes valores são iguais, tem-se: $\boldsymbol{m - 3 = 3} \Leftrightarrow m = 6$

Opção: A

30.

Qual é o valor de $\lim_{\theta\to0} \frac{\text{sen}\theta}{\theta}$?

A. -1 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

2009. 2ª época

【Resolução】

$$\lim_{\theta\to0} \frac{\text{sen}\theta}{\theta} = 1$$

⟵ **Limite notável**: $\lim_{x\to0} \frac{\text{sen}x}{x} = 1$

Opção: D

31.

Qual é o valor de $\lim_{x\to1} \left(\frac{2x^2 - x + 1}{3x - 2}\right)^2$?

A. 2 B. 4 C. 8 D. 16

2009. 2ª época

【Resolução】

$$\lim_{x\to1} \left(\frac{2x^2 - x + 1}{3x - 2}\right)^2 = \left(\frac{2 \cdot 1^2 - 1 + 1}{3 \cdot 1 - 2}\right)^2 = 2^2 = 4$$

⟵ Como não é nenhuma indeterminação, basta substituir x por 1.

Opção: B

32.

Quando $x \to +\infty$, qual das seguintes funções é divergente?

A. $y = \frac{x^4 + 3x}{x^5 - 4}$ B. $y = \frac{x^5 + 6x}{x^6 - 3}$ C. $y = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$ D. $y = \frac{x^3 - 8x}{x^3 + 5}$

2009. 2ª época

【Resolução】

Calcula-se o limite de cada função das opções dadas.

Para levantar uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, divide-se o numerador e o denominador pela potência máxima do denominador.

A. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 + 3x}{x^5 - 4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^4+3x}{x^5}}{\frac{x^5-4}{x^5}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^4}}{1 - \frac{4}{x^5}} = \frac{0 + 0}{1 - 0} = 0$

⟵Como o denominador é do 5° grau, divide-se por x^5.

B. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5 + 6x}{x^6 - 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^5+6x}{x^6}}{\frac{x^6-3}{x^6}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{6}{x^5}}{1 - \frac{3}{x^6}} = \frac{0 + 0}{1 - 0} = 0$

⟵Como o denominador é do 6° grau, divide-se por x^6.

C. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3+1}{x^2}}{\frac{x^2-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{\infty + 0}{1 - 0} = \infty$

⟵Como o denominador é do 2° grau, divide-se por x^2.

D. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 8x}{x^3 + 5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3-8x}{x^3}}{\frac{x^3+5}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{8}{x^2}}{1 + \frac{5}{x^3}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$

⟵Como o denominador é do 3° grau, divide-se por x^3.

Os limites das funções das opções A, B e D são reais. Por isso as funções destas opções são convergentes.
Como a função da opção C não é convergente, a função desta opção é divergente.

Opção: C

←Uma sucessão a_n é convergente se $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$.

←Uma sucessão que não é convergente é divergente.

33.

Qual é a derivada da função $y = (x+1)(x+2)$?

A. $2x+3$ B. $2x+4$ C. $3x+2$ D. $3x+40$

2009. 2ª época

【**Resolução**】

$$y' = (x+1)'(x+2) + (x+1)(x+2)'$$
$$= 1\cdot(x+2) + (x+1)\cdot 1 = 2x+3$$

Opção: A

⟵ $[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x) + g'(x)$

⟵ Como $(x)' = 1$ e $(k)' = 0; \forall k \in \mathbb{R}$, então $(x+1)' = 1$ e $(x+2)' = 1$.

34.

Qual é a derivada da função $y = \ln(x^2-3)$?

A. $\dfrac{2}{x^2-3}$ B. $\dfrac{1}{2(x^2-3)}$ C. $\dfrac{2x}{x^2-3}$ D. $\dfrac{1}{x^2-3}$

2009. 2ª época

【**Resolução**】

$$y' = \frac{(x^2-3)'}{x^2-3} = \frac{2x}{x^2-3}$$

Opção: C

⟵ **Derivada de uma função composta**:
$[\ln f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ porque $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

35.

Qual é a abcissa do ponto em que a função $y = \sqrt[3]{x}$ <u>NÃO</u> é derivável?

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

2009. 2ª época

【**Resolução**】

Seja $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

$$f'(x) = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Como o denominador é diferente de zero, então o domínio de $f'(x)$ é $x \neq 0$.
Como não existe $f'(0)$, $f'(x)$ não é derivável em $x = 0$.

Opção: B

⟵ $(x^n)' = nx^{n-1}, \forall n \in \mathbb{R}$.

⟵ Uma função é derivável em $x = a$ se e só se existe $f'(a)$.

36.

Qual é a ordenada do ponto onde a função $y = x^3 - 3x$ atinge o extremo máximo?

A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

2009. 2ª época

【**Resolução**】

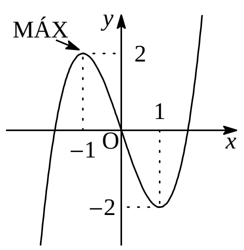
Sendo $f(x) = x^3 - 3x$, tem-se: $f'(x) = 3x^2 - 3$.
Calcula-se os zeros de $f'(x)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$$

Constroi-se a tabela de monotonia e extremos:

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	Máx	↘	Mín	↗

O gráfico da função $y = x^3 - 3x$ representa-se:



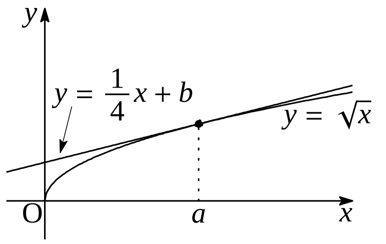
Pela leitura da tabela, couclui-se que a função $f(x)$ tem um extremo máximo em $x = -1$.
Então a ordenada do ponto onde a função $y = x^3 - x$ atinge o extremo máximo é: $f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = 2$

Opção: D

⟵ ★ Se $\boldsymbol{f'(a) = 0}$ e $f'(x)$ passa em $x = a$ de **negativa a positiva**, a função $f(x)$ tem para $x = a$ um extremo **mínimo**.
★ Se $\boldsymbol{f'(a) = 0}$ e $f'(x)$ passa em $x = a$ de **positiva a negativa**, a função $f(x)$ tem para $x = a$ um extremo **máximo**.

37.

Na figura abaixo, a recta $y = \dfrac{1}{4}x + b$ é tangente ao gráfico da função $y = \sqrt{x}$ no ponto de abcissa $x = a$.



Quais são os valores de a e b respectivamente?

A. 4 e 1

B. 1 e 2

C. 1 e 4

D. 2 e 4

2009. 2ª época

【Resolução】

Sendo $f(x) = \sqrt{x}$, tem-se: $f'(x) = (x^{\frac{1}{2}})' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

⟵ $(x^{\frac{1}{2}})' = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Como a recta $y = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}x+b$ cujo declive é $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$ é tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ em $x = a$, tem-se: $f'(a) = \dfrac{1}{4}$

⟵ $f'(a)$ é igual ao declive da recta tangente ao gráfico de $f(x)$ em $x = a$.

Como $f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$, tem-se:

⟵ Substitui-se x por a em $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2\sqrt{a} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 2 \Leftrightarrow a = 4$$

O ponto de tangência é $(4; 2)$ porque $f(4) = \sqrt{4} = 2$.
Como a recta $y = \dfrac{1}{4}x + b$ passa pelo ponto $(4; 2)$, tem-se:

$$2 = \frac{1}{4} \cdot 4 + b \Leftrightarrow b = 1$$

⟵ Substitui-se $x = 4$ e $y = 2$ em $y = \dfrac{1}{4}x + b$.

Por isso, os valores de a e b são respectivamente 4 e 1.

Opção: A

38.

Considerando $C_n^2 = 45$, onde $n > 2$, qual é o valor de n?

A. 90 B. 45 C. 10 D. 9

2009. 2ª época

【Resolução】

$$C_n^2 = \frac{A_n^2}{2!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

⟵ $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!\,p!} = \dfrac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}^{p \text{ factores}}}{p(p-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Como $C_n^2 = 40$, tem-se:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 45 \Leftrightarrow n(n-1) = 90 \Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0$$
$$\Leftrightarrow (n-10)(n+9) = 0$$
$$\Leftrightarrow n = 10 \vee n = -9$$

⟵ Factoriza-se $n^2 - n - 90$ aplicando $x^2 + (a+b)x = ab = (x+a)(x+b)$.

Como $n > 2$,tem-se: $n = 10$

⟵ $n = -9$ não satisfaz a condição $n > 2$.

Opção: C

39.

Sejam p e q duas proposições quaisquer. Qual é a expressão equivalente a $\sim(\sim p \wedge q)$

A. $\sim p \vee q$ B. $p \vee \sim q$ C. $\sim p \wedge q$ D. $p \wedge \sim q$

2009. 2ª época

【**Resolução**】

$$\sim(\sim p \wedge q) = \sim(\sim p) \vee \sim q$$
$$= p \vee \sim q$$

Opção: B

⟵ **As primeiras leis de De Mogan**:
★ $\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$; ★ $\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$
⟵ $\sim(\sim p) = p$

40.

Num grupo de 8 estudantes 5 são estrangeiros. Qual é a probabilidade de entre 5 estudantes seleccionados ao acaso 2 serem estrangeiros?

A. $\frac{1}{28}$ B. $\frac{3}{28}$ C. $\frac{5}{28}$ D. $\frac{9}{28}$

2009. 2ª época

【**Resolução**】

Este grupo tem 5 estrangeiros e 3 não estrangeiros.

O número de casos possíveis é $C_8^5 = C_8^3$ porque se escolhem 5 estudantes dentre 8 estudantes.

O número de caso favoráveis é $C_5^2 \cdot C_3^3$ porque se escolhem 2 estrangeiros dentre 5 estrangeiros e se escolhem 3 não estrangeiros de 3 não estrangeiros.

Por isso, a probabilidade pedida é:

$$\frac{C_5^2 \cdot C_3^3}{C_8^3} = \frac{\frac{5 \cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}} \cdot 1}{\frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{3 \cdot 2}}} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$$

Opção: C

⟵ $\mathbf{C_p^n}$ é o número total das maneiras possíveis de **escolher** p elementos dentre n elementos. Quando **não interessa ordem**, aplica-se uma combinação C_n^p.

$$C_p^n = \frac{A_p^n}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-r+1)}^{p \text{ factores}}}{p(p-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Propriedades: $C_n^p = C_n^{n-p}$; $C_n^n = 1$; $C_n^1 = n$

⟵ A probabilidade de um acontecimento A é dada por:

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\textbf{número de casos favoráveis}}{\textbf{número de casos possíveis}}$$

FIM

República de Moçambique

Matemática **Ministério da Educação** **Exame Extraordinário**

12ª Classe / 2008 **Conselho Nacional de Exames, Certificação e Equivalências** **120 Minutos**

Esta prova contém 40 perguntas com 4 alternativas de resposta para cada uma. Escolha a alternativa correcta e *RISQUE* a letra correspondente na sua folha de respostas.

【Resolução】

1.

Qual é o comprimento do vector $\vec{m} = (0; 2)$?

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

2008. Extraordinário

【**Resolução**】

O comprimento de $\vec{m} = (0; 2)$ é: $\left|\vec{m}\right| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$

Opção: A

⟵ O comprimento de um vector $\vec{a} = (a_1; a_2)$ é: $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

2.

Sejam A(−1; −2) e B(1; 4) as extremidades do segmento. O ponto médio do segumento é...

A. M(0; 0) B. M(0; 1) C. M(1; 1) D. M(−1; 1)

2008. Extraordinário

【**Resolução**】

O ponto médio M do segmento cujas extremidades são A(−1; −2) e B(1; 4) é: $\left(\dfrac{-1+1}{2}; \dfrac{-2+4}{2}\right) = (0; 1)$

Opção: B

⟵ O ponto médio M de um segmento cujas extremidades são $A(a_1; a_2)$ e $B(b_1; b_2)$ é: $\left(\dfrac{a_1 + a_2}{2}; \dfrac{b_1 + b_2}{2}\right)$

3.

Qual é a distância do ponto (−2; 3) à recta $4y - 3x + 2 = 0$?

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

2008. Extraordinário

【**Resolução**】

$4y - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y - 2 = 0$

Então, a distância d do ponto (−2; 3) à recta $3x - 4y - 2 = 0$ é:

$$d = \frac{|3 \cdot (-2) - 4 \cdot 3 - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-20|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

Opção: B

⟵ Para utilizar a fórmula da distâcia de um ponto a uma recta, transforma-se a equação da recta na forma $ax + by + c = 0$.

⟵ A distância d do ponto $(x_1; y_1)$ à recta $ax + by + c = 0$ é dada por: $d = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

4.

Se $U = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e $B = \{2, 5, 8\}$, então $\overline{A} \cap \overline{B}$ é igual a:

A. {1; 2; 3; 9} B. {1; 3; 7; 9} C. {1; 3; 8; 9} D. {1; 3; 9; 10}

2008. Extraordinário

【**Resolução**】

Determina-se $\overline{A}$ e $\overline{B}$:

$\overline{A} = U \setminus A = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, 5, \mathbf{7}, \mathbf{9}\}$

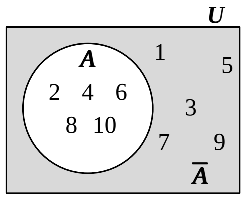
$\overline{B} = U \setminus B = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, 4, 6, \mathbf{7}, \mathbf{9}, 10\}$

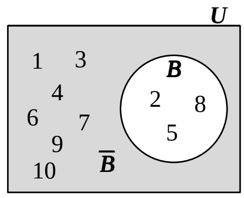
Por isso, tem-se:

$\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 3, 7, 9\}$

Opção: B

$\overline{A}$ é o conjunto de todos os elementos que pertencem a U e não pentencem a A. Isto é $\overline{A} = U \setminus A$.





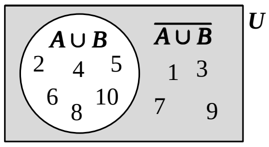
【**Outra resolução**】

Pelas leis de De Morgan, tem-se: $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

Como $U = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ e $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$, tem-se:

$$\begin{aligned}\overline{A \cup B} &= U \setminus A \cup B \\ &= \{1, 3, 7, 9\}\end{aligned}$$

⟵Leis de De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



5.

Uma Escola ofereceu cursos de Inglês e Francês, devendo os alunos se matricularem em pelo menos um deles. Dos 45 alunos de uma turma, 13 resolveram estudar tanto Inglês como Francês; em Francês, matricularam-se 22 alunos. Quantos alunos matricularam-se em Inglês?

A. 33 B. 36 C. 39 D. 45

2008. Extraordinário

【**Resolução**】

Sejam:

$U-$ Todos os alunos da turma;
$I-$ Alunos que matricularam em Inglês;
$F-$ Alunos que matricularam em Francês.

⟵ $n(U) = 45$; $n(F) = 22$; $n(I \cap F) = 13$

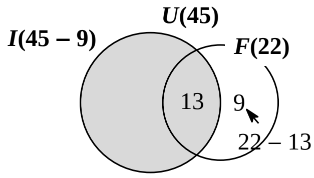
Então, os alulnos que matricularam somente em Francês são:

$22 - 13 = 9$

Então, os alunos que matricularam em Inglês são: $45 - 9 = 36$

Opção: B

⟵



6.

Uma fracção equivalente a $\dfrac{a - a^2}{a^2 - 1}$ é:

A. $-\dfrac{a}{a-1}$ B. $\dfrac{a}{a+1}$ C. $-\dfrac{a}{a+1}$ D. $\dfrac{a}{a-1}$

2008. Extraordinário

【**Resolução**】

$$\begin{aligned}\frac{a - a^2}{a^2 - 1} &= \frac{a(1-a)}{(a-1)(a+1)} \\ &= \frac{a \cdot [-\cancel{(a-1)}]}{\cancel{(a-1)}(a+1)} \\ &= -\frac{a}{a+1}\end{aligned}$$

⟵ $a - a^2 = a(1-a)$; $a^2 - 1 = a^2 - 1^2 = (a-1)(a+1)$

⟵ $1 - a = -(a-1)$

⟵ Simplifica-se $a - 1$.

Opção: C

7.

Para que o polinómio $P(x) = (m+4)x^3 + 12x^2 - 1$ tenha grau 2, o valor de m deve ser igual a:

A. -2 B. -3 C. -4 D. -5

2008. Extraordinário

【**Resolução**】

Para que $P(x)$ tenha grau 2, é necessário que o coeficiente de x^3 seja igual a zero.

Então, tem-se: $m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = -4$

Opção: C

⟵ O grau de um polinómio é o maior grau do polinómio. Neste caso, como o grau 2 deve ser o maior grau do polinómio $P(x)$, o coefiente de x^3 deve ser zero.

8.

O conjunto $\{-2, 0, 2\}$ é solução da equação...

A. $x^2 - 4 = 0$ B. $12x - 3x^2 = 0$ C. $3x(2-x)^2 = 0$ D. $12x - 3x^3 = 0$

2008. Extraordinário

【Resolução】

O conjunto $\{-2, 0, 2\}$ é solução da equação $12x - 3x^3 = 0$ da opção D porque:

$$12x - 3x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0$$ ⟵ Divide-se ambos os membros da equação por -3.

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+2) = 0$$ ⟵ Coloca-se o factor comum x em evidência. $x^2-4 = (x-2)(x+2)$ aplicando $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$.

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$$

Opção: D

【Outra resolução】

Substitui-se x por -2, 0 e 2 na equação de cada uma das opções dadas:

A. $(-2)^2 - 4 = 0;\quad 0^2 - 4 = -4 \neq 0.$ ⟵ $x = 0$ não é solução da equação $x^2 - 4 = 0$.
Logo, a opção A não é solução.

B. $12(-2) - 3(-2)^2 = -36 \neq 0.$ ⟵ $x = -2$ não é solução da equação $12x - 3x^2 = 0$.
Logo, a opção B não é solução.

C. $3 \cdot (-2) \cdot [2 - (-2)]^2 = -6 \cdot 16 = -96 \neq 0.$ ⟵ $x = -2$ não é solução da equação $3x(2-x)^2 = 0$.
Logo, a opção C não é solução.

D. $12(-2) - 3(-2)^3 = -24 + 24 = 0;\quad 12 \cdot 0 - 3 \cdot 0^3 = 0;$
$12 \cdot 2 - 3 \cdot 2^3 = 24 - 24 = 0.$ ⟵ $x = -2$, $x = 0$ e $x = 2$ são soluções da equação $12x - 3x^3 = 0$.
Logo, a opção D é solução.

9.

Se $\log_2 x + \log_4 x = 1$ então...

A. $x = \sqrt[3]{2}$ B. $x = \sqrt[3]{4}$ C. $x = \sqrt{2}$ D. $x = 3\sqrt[3]{2}$

2008. Extraordinário

【Resolução】

Como o logritmando é positivo, tem-se a condição: $x > 0$ ⟵ A expressão logarítmica $\log_a x$ tem a codição $x > 0$.

A partir da fórmula de mudança de base, tem-se: ⟵ Fórmula de mudança de base:
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$$

Então, a equação fica:

$$\log_2 x + \frac{\log_2 x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{2\log_2 x + \log_2 x}{2} = 1$$ ⟵ Ao resolver equações logarítmicas com bases diferentes, cria-se a condição de obter a mesma base através da fórmula de mudança de base.

$$\Leftrightarrow \frac{3\log_2 x}{2} = 1 \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 2^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{2}{3}}$$ ⟵ Adopta-se $\log_2$ no segundo membro da equação e iguala-se os logaritmandos.

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2^2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4}$$ ⟵ $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$ aplicando $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Opção: B

10.

O valor de k de modo que a média dos valores $2; 4; 5; 8; k; 13$ seja 8 é:

A. 4 B. 8 C. 16 D. 32

2008. Extraordinário

【Resolução】

A média $\overline{x}$ destes valores é:

$$\overline{x} = \frac{2+4+5+8+k+13}{6} = \frac{32+k}{6}$$ ⟵ Dados $x_1, x_2, \cdots, x_N$, N valores de uma distribuição, então a média (aritmética) é dada por:
$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_N}{N}$$

Como $\overline{x} = 8$, então tem-se:

$$\frac{32+k}{6} = 8 \Leftrightarrow 32 + k = 48 \Leftrightarrow k = 16$$

Opção: C

11.

O contradomínio da função $f(x) = 3\text{sen}(2x)$ é:

A. $[-3, 3]$ B. $[-2, 3]$ C. $[-2, 2]$ D. $[-3, 6]$

2008. Extraordinário

【**Resolução**】

Sabe-se que: $-1 \leq \text{sen}(2x) \leq 1$
Então, multiplicando por 3 todos os membros da inequação, tem-se: $-3 \leq 3\text{sen}(2x) \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq f(x) \leq 3$
Por isso, o contradomínio de $f(x)$ é: $[-3; 3]$

Opção: A

⟵ **Contradomínio de funções trigonométricas**:
Seja $f(x)$ uma função. Então, tem-se:
$\star -1 \leq \text{sen}\, f(x) \leq 1;$
$\star -1 \leq \cos f(x) \leq 1$
$\star -\infty \leq \text{tg}\, f(x) \leq +\infty$

12.

Observa a tabela:

Valor de x	1	2	3	4	5
Frequência de x	1	2	3	4	5

O valor da mediana de x é...

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

2008. Extraordinário

【**Resolução**】

O número de dados é: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
Como o número de dados é ímpar, a mediana será o valor central.

$$\underbrace{1\ 2\ 2\ 3\ 3\ 3\ 4}_{\text{7 dados}}\ \boxed{4}\ \underbrace{4\ 4\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5}_{\text{7 dados}}$$

Logo, a mediana é 4.

Opção: C

⟵ Soma da frequência

⟵ Mediana é o valor que ocupa a posição central de um conjunto de dados ordenados.
Para determinar a mediana é preciso ordenar os dados. Se o número de dados é ímpar, a mediana é o valor que ocupa a posição central dos dados ordenados. Se o número de dados é par, a mediana é a média aritmética dos dois valores que ocupam a posição central dos dados ordenados.

13.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ é igual a:

A. -3 B. -2 C. 1 D. 4

2008. Extraordinário

【**Resolução**】

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot (-2)$$
$$-[3 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \cdot (-2)]$$
$$= 1 - (-3) = 4$$

Opção: D

⟵ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - (gec + dbi + ahf)$

14.

A solução da equação $|x - 1| - 2 = 0$ é:

A. $\{-2; 2\}$ B. $\{-1; 2\}$ C. $\{-1; 3\}$ D. $\{-2; 3\}$

2008. Extraordinário

【**Resolução**】

$$|x - 1| - 2 = 0 \Leftrightarrow |x - 1| = 2 \Leftrightarrow x - 1 = 2 \ \vee\ x - 1 = -2$$
$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$$

Opção: C

⟵ Equação modular do tipo $\boldsymbol{|x| = a}$, onde $a \geq 0$:
$\star |x| = a \Leftrightarrow x = a \ \vee\ -a$

【Outra resolução】

Elevando ambos os membros da equação $|x-1| = 2$ ao quadrado, tem-se:

⟵ Sendo $a \geq 0$, tem-se: $|x| = a \iff x^2 = a^2$

$$|x-1|^2 = 2^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 4$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -1$$

⟵ $\forall x \in \mathbb{R}, |x|^2 = x^2$

⟵ Factoriza-se $x^2 - 2x - 3$ aplicando $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$.

15.

O conjunto solução da inequação $|2x-3| > 3$ é:

A. $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 0 \wedge x > 3\}$ B. $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 0 \vee x > 3\}$

C. $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 3\}$ D. $\{x \in \mathbb{R} \,|\, -3 < x < 0\}$

2008. Extraordinário

【Resolução】

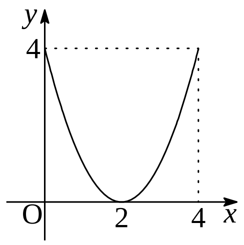
$$|2x-3| > 3 \Leftrightarrow 2x - 3 > 3 \ \vee \ 2x - 3 < -3$$
$$\Leftrightarrow 2x > 6 \ \vee \ 2x < 0$$
$$\Leftrightarrow x > 3 \ \vee \ x < 0 \Leftrightarrow x < 0 \ \vee \ x > 3$$

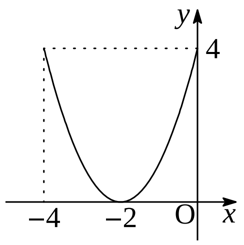
Opção: B

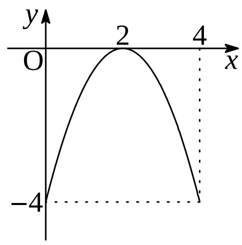
⟵ **Inequações modulares**:
Seja $a > 0$. Então, tem-se:
★$|x| < a \Leftrightarrow x < a \ \wedge \ x > -a$
★$|x| > a \Leftrightarrow x > a \ \vee x < -a$

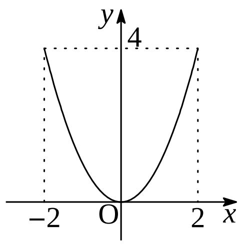
16.

Dois jóqueis, A e B, ao treinarem com seus cavalos para uma competição de hipismo, fizeram dois percursos. O jóquei A fez o percurso representado pelo gráfico da função $f(x) = x^2 - 1; -2 \leq x \leq 2$, e o jóquei B fez o percurso representado pelo gráfico da função $g(x) = f(x-2) + 1$. Nesse contexto, o percurso feito pelo jóquei B está melhor representado pelo gráfico...

A. 

B. 

C. 

D. 

2008. Extraordinário

【Resolução】

Determina-se $g(x)$:

$$g(x) = \boldsymbol{f(x-2)} + 1 = \boldsymbol{(x-2)^2 - 1} + 1 = (x-2)^2$$

⟵ Calcula-se $f(x-2)$ substituindo x por $x-2$ em $f(x) = x^2 - 1$.

Então, o gráfico da função $g(x) = (x-2)^2 = (x - \mathbf{2})^2 + \mathbf{0}$ tem o vertice $(\mathbf{2}; \mathbf{0})$ e a concavidade virada para cima porque o coeficiente de x^2 é positivo.

⟵ O gráfico de uma função quadrática, $y = a(x - \boldsymbol{p})^2 + \boldsymbol{q}$, é uma parábola e tem o vértice $(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{q})$. Se $a > 0$ a parábola tem a concavidade virada para cima e se $a < 0$, a parábola tem a concavidade virada para baixo.

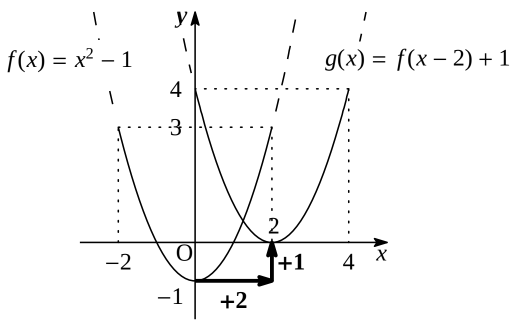
Por isso, conclui-se que o gráfico da função $g(x)$ é da opção A.

Opção: A

【Outra resolução】

O gráfico de $g(x) = f(x - \mathbf{2}) + \mathbf{1}$ obtém-se a partir do gráfico de $f(x)$ através da translação de **2** unidades para direita e **1** unidade para cima.

⟵ O gráfico de $y = f(x-p) + q$ obtém-se a partir do gráfico de $y = f(x)$ através de uma translação de p unidades para direita e q unidades para cima.



Como o ponto do vértice de $f(x) = x^2 - 1$ é $(0; -1)$, o ponto do vértice de $g(x) = f(x-2) + 1$ é $(0 + \mathbf{2}; -1 + \mathbf{1}) = (2; 0)$.

Como o gráfico de $f(x)$ tem a concavidade virada para cima, então o gráfico de $g(x)$ também tem a concavidade virada para cima.

Como o domínio de $f(x)$ é $[-2; 2]$, o domínio de $g(x)$ é:

$$[-2+2; 2+2] = [0; 4]$$

Por isso, conclui-se que o gráfico da função $g(x)$ é da opção A.

17.

Se f e g são funções reais dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = \log_2 x$, então $(g o f)(-1)$ é:

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

2008. Extraordinário

【Resolução】

Calcula-se $f(-1)$: $f(-1) = (-1)^2 = 1$ ⟵ Substitui-se x por -1 em $f(x) = x^2$.

Logo, tem-se: $(g o f)(-1) = g[\boldsymbol{f(-1)}] = g(\mathbf{1})$ ⟵ **Função composta**: $(g o f)(x) = g[f(x)]$

$= \log_2 1 = \log_2 2^0 = 0$ ⟵ Sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, tem-se: $\boldsymbol{\log_a 1} = \log_a a^0 = \mathbf{0}$

Opção: B

18.

Quanto à paridade a função $f(x) = x^2 + 4$ é...

A. ímpar. B. par. C. ímpar e par. D. nem ímpar nem par.

2008. Extraordinário

【Resolução】

Determina-se $f(-x)$: $f(-x) = (-x)^2 + 4 = x^2 + 4 = f(x)$ ⟵ Substitui-se x por $-x$ em $f(x) = x^2 + 4$.

Como $f(-x) = f(x)$, então $f(x)$ é par.

⟵ Se $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$, então $f(x)$ é **par**.
Se $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$, então $f(x)$ é **ímpar**.

Opção: B

19.

A inversa da função $f(x) = \dfrac{x}{3}$ é:

A. $f^{-1}(x) = 3x$ B. $f^{-1}(x) = x^3$ C. $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{3}$ D. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

2008. Extraordinário

【Resolução】

Substituindo $f(x)$ por y, tem-se: $y = \dfrac{x}{3}$

Resolve-se em ordem a x: $y = \dfrac{x}{3} \Leftrightarrow x = 3y$

Trocando as variáveis x por y e y por x, tem-se: $y = 3x$, que é a função inversa pedida, $f^{-1}(x) = 3x$.

Opção: A

⟵ **Passos para obter a expressão da função inversa**

1. Substitui-se $h(x)$ por y.
2. Resolve-se em ordem a x.
3. Trocam-se as variáveis x por y e y por x.

20.

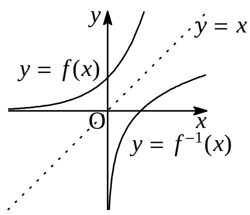
Os gráficos de funções inversas uma da outra são simétricos em relação...

A. à origem B. ao eixo das ordenadas
C. ao eixo das abcissas D. à recta de equação $y = x$

2008. Extraordinário

【Resolução】

Os gráficos de funções inversas uma da outra são simétricos em relação à recta de equação $y = x$.



Opção: D

21.

Numa progressão aritmética em que $a_1 = 2$ e $d = 3$, a_{20} é:

A. 62 B. 59 C. 53 D. 50

2008. Extraordinário

【Resolução】

O termo geral de uma PA em que $a_1 = 2$ e $d = 3$ é dado por:

$a_n = a_1 + (n-1)d \Leftrightarrow a_n = 2 + (n-1)3 \Leftrightarrow a_n = 3n - 1$

Substituindo n por 20, tem-se: $a_{20} = 3 \cdot 20 - 1 = 59$

⟵ O termo geral de uma **PA** é : $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$
O termo gera de uma **PG** é: $\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$

Opção: B

22.

Numa progressão aritmética finita o primeiro e o último termos são respectivamente 2 e 20. Se a soma dos seus termos é 110, quantos termos tem a sucessão?

A. 5 B. 10 C. 15 D. 20

2008. Extraordinário

【**Resolução**】

Pela condição, tem-se: $a_1 = 2$, $a_n = 20$ e $S_n = 110$

Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA, tem-se: $\dfrac{n(2+20)}{2} = 110 \Leftrightarrow 11n = 110 \Leftrightarrow n = 10$

Portanto, a sucessão tem 10 termos.

Opção: B

⟵ A soma dos n primeiros termos de uma PA é dada por:
$S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$ ou $S_n = \dfrac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$

23.

Dada a progressão geométrica $\left(1; \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{8}; \cdots\right)$ a soma dos seus infinitos termos é:

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

2008. Extraordinário

【**Resolução**】

Esta sucessão é uma PG em que $a_1 = 1$ e $q = \dfrac{1}{2}$.

Como $|q| < 1$, então a soma dos seus infinitos termos da PG é:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Opção: A

⟵ $1, \quad \dfrac{1}{2}, \quad \dfrac{1}{4}, \quad \dfrac{1}{8}, \quad \cdots$
$\times\frac{1}{2} \quad \times\frac{1}{2} \quad \times\frac{1}{2} \quad \times\frac{1}{2}$

⟵ A soma de todos os termos de uma PG em que $|q| < 1$ é dada por: $S = \dfrac{a_1}{1-q}$.

24.

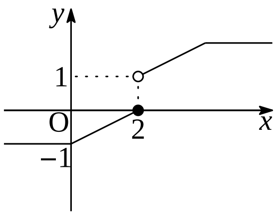
A figura representa o gráfico de uma função $y = f(x)$. Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$?

A. 0

B. 1

C. 2

D. Não existe.



2008. Extraordinário

【**Resolução**】

Pela leitura da figura, tem-se:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$$

Como os limites laterais em $x = 2$ são diferentes, conclui-se que não existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Então, a opção correcta é D.

Opção: D

⟵ Quando x se aproxima de 2 pela esquerda $f(x)$ aproxima-se de 0, isto é: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 0$.
Quando x se aproxima de 2 pela direita, $f(x)$ aproxima-se de 1, isto é: $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$

⟵ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x) \Leftrightarrow \nexists \lim\limits_{x \to a} f(x)$

25.

O valor do $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x-7}{x^2 - 49}$ é:

A. $\dfrac{1}{7}$ B. $\dfrac{1}{14}$ C. $\dfrac{1}{28}$ D. $\dfrac{1}{56}$

2008. Extraordinário

【**Resolução**】

$$\lim_{x \to 7} \frac{x-7}{x^2-49} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 7} \frac{\cancel{x-7}}{(\cancel{x-7})(x+7)} = \lim_{x \to 7} \frac{1}{x+7}$$
$$= \frac{1}{7+7} = \frac{1}{14}$$

Opção: B

⟵ Para levantar a indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$, factoriza-se $x^2 - 49$ aplicando $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

⟵ Substitui-se x por 7.

26.

O $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^n$ é igual a:

A. e^{-1} B. e^{-2} C. e^{-3} D. e^{-4}

2008. Extraordinário

【Resolução】

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n=[1^\infty]=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}-1\right)\cdot n}$$
$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{n}\right)\cdot n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(-2)}$$
$$=e^{-2}$$

Opção: B

⟵ Para levantar a indeterminação do tipo 1^∞, utiliza-se a seguinte fórmula:
Sejam $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$ e $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$. Então tem-se:
$\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=[1^\infty]=e^{\lim\limits_{x\to a}[f(x)-1]\cdot g(x)}$, onde e chama-se número de Nepper; tal que $e=2,7183\cdots$

【Outra resolução】

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\mathbf{-2}}{n}\right)^n=e^{\mathbf{-2}}$$

⟵ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{\boldsymbol{k}}{n}\right)^n=e^{\boldsymbol{k}}$, onde $k\in\mathbb{R}$ é o numerador de $\dfrac{k}{n}$.

27.

Considere a função $f(x)=\begin{cases}2x-1, & \text{se } x\le 3\\ x^2+5, & \text{se } x>3\end{cases}$. O $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)$ é igual a:

A. 5 B. 8 C. 11 D. 14

2008. Extraordinário

【Resolução】

Quando x se aproxima de 3 pela direita, $x>3$.
Logo, quando $x\to3^+$, $f(x)=x^2+5$.
Então, o limite lateral à direita de $f(x)$ no ponto 3 é:

$$\lim_{x\to3^+}f(x)=\lim_{x\to3^+}(x^2+5)=3^2+5=14$$

Opção: D

⟵ $x\to a^+$ significa que x se aproxima de a pela **direita**.
$x\to a^-$ significa que x se aproxima de a pela **esquerda**.

⟵ Substitui-se $f(x)$ por x^2+5 porque $x>3$.

28.

A função $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-16} & \text{se } x\ne4\\ k-2 & \text{se } x=4\end{cases}$ é contínua no ponto $x=4$ para k igual a:

A. $-\dfrac{9}{4}$ B. $-\dfrac{7}{4}$ C. $\dfrac{7}{4}$ D. $\dfrac{9}{4}$

2008. Extraordinário

【Resolução】

Para $x\ne4$, os limites laterais são iguais.
Por isso, existe o limite de $f(x)$ no ponto $x=4$ e o seu valor é:

$$\lim_{x\to4}f(x)=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-16}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{\cancel{(x-4)}(x-2)}{\cancel{(x-4)}(x+4)}=\lim_{x\to4}\frac{x-2}{x+4}$$
$$=\frac{4-2}{4+4}=\frac{1}{4}$$

⟵ Como $f(x)=\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-16}$ se $x\ne4$,
então $f(x)=\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-16}$ se $x<4$ ou $x>4$.
Por isso, tem-se: $\lim\limits_{x\to4^+}f(x)=\lim\limits_{x\to4^-}f(x)$

⟵ Factoriza-se o numerador e o denominador aplicando, respectivamente, $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ e $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

O valor da função no ponto $x=4$ é: $f(4)=k-2$

⟵ $f(x)=k-2$ se $x=4$.

Para que $f(x)$ seja contínua no ponto $x=4$, é necessário que $\lim\limits_{x\to4}f(x)=f(4)$, isto é:

⟵ Uma função $f(x)$ é contínua no ponto $x=a$ $\Longleftrightarrow\exists\lim\limits_{x\to a}f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

$$k-2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow k=\frac{1}{4}+2\Leftrightarrow k=\frac{1+8}{4}\Leftrightarrow k=\frac{9}{4}$$

Opção: D

29.

Dada a função $f(x) = 2e^x$, a sua derivada é:

A. e^x B. $2e^x$ C. $3e^x$ D. $4e^x$

2008. Extraordinário

【Resolução】

$f'(x) = (2e^x)' = 2(e^x)' = 2e^x$ $\longleftarrow \star\forall k \in \mathbb{R}, [kf(x)]' = kf'(x)$; $\star(e^x)' = e^x$

Opção: B

30.

Se $g(x) = ax^2 - a^2x$ com $a \neq 0$, então $g'(a)$ é igual a:

A. a B. a^2 C. a^3 D. a^4

2008. Extraordinário

【Resolução】

Determina-se: $g'(x) = (ax^2 - a^2x)' = a \cdot 2x - a^2 \cdot 1 = 2ax - a^2$ $\longleftarrow (x^2)' = 2x$ e $(x)' = 1$ aplicando $\forall n \in \mathbb{R}, (x^n)' = nx^{n-1}$

Por isso, tem-se: $g'(\boldsymbol{a}) = 2a \cdot \boldsymbol{a} - a^2 = a^2$ $\longleftarrow$ Substitui-se x por a em $g'(x) = 2ax - a^2$.

Opção: B

31.

A derivada da função $y = \cos(1 - x^2)$ é:

A. $y' = 2\text{sen}(1 - x^2)$ B. $y' = -\text{sen}(1 - x^2)$

C. $y' = 2x\text{sen}(1 - x^2)$ D. $y' = 2\cos(1 - x^2)\text{sen}(1 - x^2)$

2008. Extraordinário

【Resolução】

$y' = [\cos(1 - x^2)]' = -\text{sen}(1 - x^2) \cdot (1 - x^2)'$ $\longleftarrow$ Como $(\cos x)' = -\text{sen}x$, $[\cos f(x)]' = -\text{sen} f(x) \cdot f'(x)$

$= -\text{sen}(1 - x^2) \cdot (-2x) = 2x\text{sen}(1 - x^2)$ $\longleftarrow (1 - x^2)' = 0 - 2x = -2x$ aplicando $\forall k \in \mathbb{R}, (k)' = 0$ e $\forall n \in \mathbb{R}, (x^n)' = nx^{n-1}$

Opção: C

32.

A equação da recta tangente à curva da função $f(x) = x^3 - 3x$ no ponto $x = 1$ é:

A. $y - 2 = 0$ B. $y - 1 = 0$ C. $y + 1 = 0$ D. $y + 2 = 0$

2008. Extraordinário

【Resolução】

O valor de $f'(1)$ é igual ao declive da recta tangente à curva da função $f(x) = x^3 - 3x$ em $x = 1$. $\longleftarrow$ $f'(a)$ é igual ao declive da recta tangente à curva da função $y = f(x)$ no ponto $x = a$.

Como $f'(x) = 3x^2 - 3$, então $f'(\mathbf{1}) = 3 \cdot \mathbf{1}^2 - 3 = 0$ $\longleftarrow (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$

Por isso, o declive da recta tangente em $x = 1$ é 0. Substitui-se x por 1 em $f'(x) = 3x^2 - 3$.

Como $f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}^3 - 3 \cdot \mathbf{1} = -2$, então a recta tangente passa pelo ponto $(1; -2)$. $\longleftarrow$ Substitui-se x por 1 em $f(x) = x^3 - 3x$. O gráfico de uma função $y = f(x)$ passa pelo ponto $(a; b)$ se $f(a) = b$.

A equação da recta que passa pelo ponto $(1; -2)$ e tem o declive 0 é dada por: $y - (-2) = 0(x - 1) \Leftrightarrow y + 2 = 0$ $\longleftarrow$ A equação da recta que passa pelo ponto $(x_1; y_1)$ e tem o declive m é dada por: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Opção: D

33.

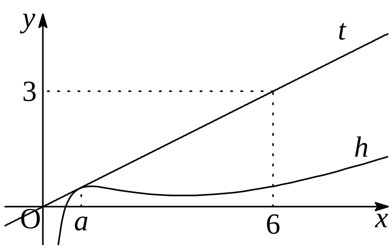
Na figura está representado o gráfico da função h e uma recta t, tangente ao gráfico no ponto de abcissa a. O valor de $h'(a)$ é...

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{6}$



2008. Extraordinário

【Resolução】

Como a recta t é tangente ao gtáfico de $h(x)$ em $x = a$, o valor de $h'(a)$ é igual ao declive da recta t.

⟵ O valor de $f'(a)$ é igual ao declive da recta tangente ao gráfico de uma função $y = f(x)$ em $x = a$.

Determina-se o declive da recta t:

A partir da figura, como o gráfico da recta t passa pela origem e o ponto $(6; 3)$, o declive da recta t é: $\dfrac{3-0}{6-0} = \dfrac{1}{2}$

⟵ O declive da recta que passa pelos pontos $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$ é dado por: $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Logo, tem-se: $h'(a) = \dfrac{1}{2}$

Opção: A

34.

A função $m(x) = 1 + x - 3x^3$ tem um máximo no ponto de abcissa...

A. $-\dfrac{1}{3}$ B. $-\dfrac{1}{9}$ C. $\dfrac{1}{9}$ D. $\dfrac{1}{3}$

2008. Extraordinário

【Resolução】

Determina-se $m'(x)$: $m'(x) = 1 - 3 \cdot 3x^2 = 1 - 9x^2$

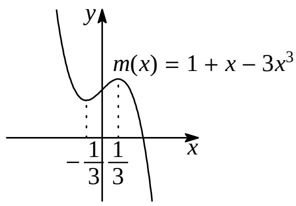
⟵ $(x)' = 1$ e $(x^3)' = 3x^2$ aplicando $\forall x, (x^n)' = nx^{n-1}$

Calcula-se os zeros de $m'(x)$:

$$m'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 9x^2 = 0 \Leftrightarrow 9x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (3x-1)(3x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \vee x = -\frac{1}{3}$$

⟵ Há posibilidade de ter extremos para $x = \pm\dfrac{1}{3}$.



Constroi-se a tabela de monotonia e extremos:

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	Mín	↗	Máx	↘

Pela tabela, a função $m(x)$ tem um extremo máximo no ponto de abcissa $\dfrac{1}{3}$.

⟵Se $\boldsymbol{f'(a) = 0}$ e $f'(x)$ passa em $x = a$ de **negativa a positiva**, a função $f(x)$ tem para $x = a$ um extremo **mínimo**. Se $\boldsymbol{f'(a) = 0}$ e $f'(x)$ passa em $x = a$ de **positiva a negativa**, a função $f(x)$ tem para $x = a$ um extremo **máximo**.

Opção: D

35.

Qual é a negação da proposição $\sim p \wedge q$?

A. $p \vee \sim q$ B. $p \wedge \sim q$ C. $\sim p \vee \sim q$ D. $\sim p \wedge \sim q$

2008. Extraordinário

【Resolução】

$$\sim(\sim p \wedge q) = \sim(\sim p) \wedge \sim q$$
$$= p \vee \sim q$$

Opção: A

Primeiras leis de De Morgan:

A negação de uma disjunção é a conjunção das negações, isto é, $\boldsymbol{\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q}$.

A negação de uma conjunção é a disjunção das negações, isto é, $\boldsymbol{\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q}$.

36.

$x \Rightarrow y$ é falsa se...

A. x e y forem verdadeiras. B. x for falsa e y verdadeira.

C. x e y forem falsas. D. x for verdadeira e y falsa

2008. Extraordinário

【Resolução】

$x \Rightarrow y$ é falsa se x for verdadeira e y falsa.

⟵ $p \Rightarrow q$ só é falsa se o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso.

Opção: D

37.

$\dfrac{(n+2)!}{n!}$ é igual a:

A. $-n^2 + 3n + 2$ B. $n^2 - 3n + 2$ C. $n^2 + 3n + 2$ D. $-n^2 - 3n - 2$

2008. Extraordinário

【Resolução】

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} = (n+2)(n+1) = n^2 + 3n + 2$$

Opção: C

⟵ $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$
$(n+2)! = (n+2)(n+1)\underbrace{n\cdots 3\cdot 2\cdot 1}_{n!} = (n-2)(n-1)n!$

38.

C_{12}^3 é igual a:

A. 210 B. 220 C. 230 D. 240

2008. Extraordinário

【Resolução】

$$C_{12}^3 = \frac{A_{12}^3}{3!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1} = 220$$

Opção: B

⟵ $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!} = \dfrac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}^{p \text{ factores}}}{p(p-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$

39.

De quantas maneiras diferentes 6 pessoas podem ocupar 6 lugares?

A. 700 B. 710 C. 720 D. 730

2008. Extraordinário

【Resolução】

Deseja-se o número total das maneiras diferentes possíveis de permutar 6 pessoas numa fila. Então, trata-se de uma permutação de 6 elementos, isto é: $P_6 = 6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$

Opção: C

⟵ P_n é o número total das maneiras diferentes possíveis de permutar n elementos numa fila. Calcula-se:
$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$

40.

Um casal pretende ter três filhos. Considerando iguais as probabilidades de nascer de cada vez um menino ou uma menina, qual é a probabilidade de nascer um menino e duas meninas?

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{8}$ D. $\frac{3}{4}$

2008. Extraordinário

【Resolução】

Designa-se por M-menino e F-menina.

O número de casos possíveis é 8, que são os seguintes:

MMM; MMF; MFM; FMM; MFF; FMF; FFM; FFF

O número de casos favoráveis é 3, que são os seguintes:

MFF; FMF; FFM

Por isso, a probabilidade pedida é: $\frac{3}{8}$

Opção: C

⟵ A probabilidade de um acontecimento A é dada por:

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\textbf{número de casos favoráveis}}{\textbf{número de casos possíveis}}$$

【Outra resolução】

Designa-se por M-menino e F-menina.

O número de casos possíveis é $2^3 = 8$.

⟵ Há duas possibilidades:
nascer um menino ou uma menina

O número de casos favoráveis é $\dfrac{3!}{1!2!} = 3$ porque é uma permutação das 3 letras MFF que contém 1 M e 2 F.

⟵ Se há n objectos com n_1 do tipo 1, n_2 do tipo 2, $\cdots$, n_r, então há $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$ permutações dos n objectos.

Por isso, a probabilidade pedida é: $\frac{3}{8}$

FIM

República de Moçambique

Matemática | **Ministério de Educação e Cultura** | **1ª Época**

12ª Classe / 2008 | **Conselho Nacional de Exames, Certificação e Equivalências** | **120 Minutos**

Esta prova contém 40 perguntas com 4 alternativas de resposta para cada uma. Escolha a alternativa correcta e *RISQUE* a letra correspondente na sua folha de respostas.

【Resolução】

1.

A distância entre os pontos cujas coordenadas são $(m; 2)$ e $(2; 0)$ é de 2 unidades. Qual é o valor de m?

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

2008.1ªÉpoca

【Resolução】

Como a distância entre $(m; 2)$ e $(2; 0)$ é 2 unidades, tem-se:

$$\sqrt{(2-m)^2 + (0-2)^2} = 2$$

⟵ A distância entre dois ponots (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, tem-se:

$$(2-m)^2 + (0-2)^2 = 2^2$$

⟵ Se $A > 0$ e $B > 0$, então $A = B \Leftrightarrow A^2 = B^2$.

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$$

⟵ Factoriza-se $m^2 - 4m + 4$ aplicando $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

Opção: A

2.

Qual é o coeficiente angular da recta que passa pelos pontos $(1; 4)$ e $(0; 1)$?

A. -3 B. -2 C. 2 D. 3

2008.1ªÉpoca

【Resolução】

Como a recta passa pelos pontos $(1; 4)$ e $(0; 1)$,

o coeficiente angular da recta é: $\dfrac{1-4}{0-1} = 3$

⟵ O coeficiente angular da recta que passa pelos dois ponots (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Opção: D

3.

Qual é o ângulo formado entre as rectas $x - y = -2$ e $y = 2$?

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

2008.1ªÉpoca

【Resolução】

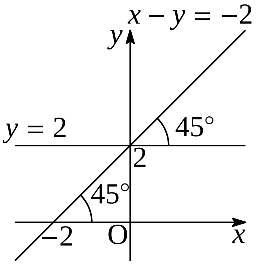
$x - y = -2 \Leftrightarrow y = x + 2$

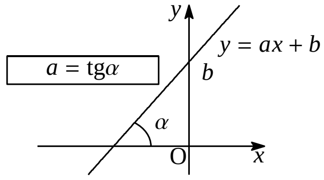
O coeficiente angular (declive) da recta $y = x + 2$ é **1**.

⟵ O coeficiente angular de uma recta $y = \boldsymbol{a}x + b$ é $\boldsymbol{a}$.

Seja α o ângulo formado entre a recta $y = x + 2$ e o eixo das abcissas.

⟵ **O coeficiente angular** da recta, que forma um ângulo de α com sentido positivo do eixo das abcissas, é igual a $\mathbf{tg}\boldsymbol{\alpha}$.





Então, tem-se: $\mathrm{tg}\alpha = 1$

Resolvendo a equação $\mathrm{tg}\alpha = 1$, onde $0° \leq \alpha < 180°$, tem-se: $\alpha = 45°$

Como a recta $y = 2$ é paralela ao eixo das abcissas, o ângulo formado entre as rectas $x - y = -2$ e $y = 2$ também é de 45°.

Opção: B

4.

Sendo A = {1, 3, 5, 7, 9}, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 5 = 2\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 8\}$. Qual é a solução de $(A \cap C) \cup B$?

A. {6} B. {7} C. {8} D. {9}

2008.1ªÉpoca

【Resolução】

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 5 = 2\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 7\} = \{7\}$

Como $A \cap C = \{7\}$, tem-se:

$$(A \cap C) \cup B = \{7\} \cup \{7\} = \{7\}$$

Opção: B

⟵ $A \cap B = \{x|x \in A \text{ e } x \in B\}$

⟵ $A \cup B = \{x|x \in A \text{ ou } x \in B\}$

【Outra resolução】

$(A \cap C) \cup B = B \cup (A \cap C)$

$= (B \cup A) \cap (B \cup C)$

Como $B \cup A = \{1, 3, 5, \mathbf{7}, 9\}$ e $B \cup C = \{\mathbf{7}\}$, então tem-se:

$$(B \cup A) \cap (B \cup C) = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{7\} = \{7\}$$

⟵ Lei comutativa: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$

⟵ Lei Distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5.

Num torneio inter-escolar, os alunos competem em duas modalidadeds conforme as seguintes inscrições: futebol e basquetebol 100, futebol 170 e só a uma das modalidades 100. Sabendo que 95 alunos inscreveram-se somente para a organização do torneio, qual é o total de alunos envolvidos neste torneio?

A. 275 B. 285 C. 295 D. 395

2008.1ªÉpoca

【Resolução】

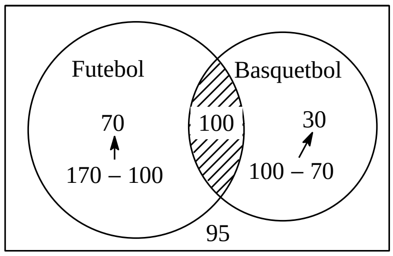
Como 170 alunos inscreveram-se a futeball e 100 alunos inscreveram-se a futebol e basquetbol, os alunos que se inscreveram só a futebol são: $170 - 100 = 70$

Como 100 inscreveram-se só a uma das modalidades e 70 inscreveram-se só a futebol, os alunos que se inscreveram só a basquetebol são: $100 - 70 = 30$

Portanto, o total de alunos envolvidos neste torneiro é:

$$70 + 100 + 30 + 95 = 295$$

Opção: C



6.

Para que −2 seja raiz do polinómio $P(x) = x^3 + (m + 2)x^2 + (1 + m)x - 2$, qual deve ser o valor de m?

A. 2 B. 3 C. 4 D. −2

2008.1ªÉpoca

【Resolução】

Como −2 é uma raiz de $P(x)$, tem-se: $P(-2) = 0$

Então, $(-2)^3 + (m + 2)(-2)^2 + (1 + m)(-2) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow -8 + 4m + 8 - 2 - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$

Opção: A

⟵ Se a é uma raiz dum polinómio $P(x)$, então $P(a) = 0$.

⟵ Para se obter $P(-2)$, substitui-se x por −2 em $P(x) = x^3 + (m + 2)x^2 + (1 + m)x - 2$.

7.

Qual é o domínio de existência da expressão $\sqrt{x^2 - 4}$?

A. $x \le \pm 2$ B. $x \ge \pm 2$ C. $x \le -2 \lor x \ge 2$ D. $x \le -2 \land x \ge 2$

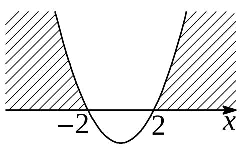
2008.1ªÉpoca

【Resolução】

Como o índice 2 é par, o radicando é maior ou igual a zero, isto é:

$x^2 - 4 \ge 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 2) \ge 0$

$\Leftrightarrow x \le -2 \lor 2 \le x$



Opção: C

⟵ **Expressão algébrica irracional $\sqrt[n]{x}$:**
- se o índice n é par, então tem-se: $x \ge 0$
- se o índice n é ímpar, então tem-se: $x \in \mathbb{R}$

⟵ A inequação $(x+2)(x-2) \ge 0$ significa o intervalo de x, incluindo os extremos, em que $y = (x + 2)(x - 2)$ está em cima do eixo das abcissas.

8.

Qual é a solução da equação $\log_4 \log_2(x-1) = 1$?

A. $x = 15$ B. $x = 17$ C. $x = 18$ D. $x = 19$

2008.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Como o logaritmando é positivo, tem-se a condição:

$\log_2(x-1) > 0 \cdots ① \quad \wedge \quad x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \cdots ②$

Resolvendo ①, tem-se:

$\log_2(x-1) > \log_2 2^0 \Leftrightarrow x-1 > 2^0 \Leftrightarrow x > 2 \cdots ①'$

Calculando a intersecção entre ①′ e ②, tem-se: $x > 2$

Resolvendo a equação, tem-se:

$\log_4 \log_2(x-1) = 1$

$\Leftrightarrow \log_4 \log_2(x-1) = \log_4 4$

$\Leftrightarrow \log_2(x-1) = 4$

$\Leftrightarrow \log_2(x-1) = \log_2 2^4$

$\Leftrightarrow x-1 = 16 \Leftrightarrow x = 17$

$x = 17$ satisfaz a condição $x > 2$.

Opção: B

⟵ A expressão logarítmica $\log_a x$ tem a condição $x > 0$.

⟵ Como a base $2 > 1$, o sinal da desigualdade mantem-se.

- Se a base $a > 1$ e $\log_a p > \log_a q$, então $p > q$. (O sinal da desigualdade mantem-se.)
- Se a base $0 < a < 1$ e $\log_a p > \log_a q$, então $p < q$. (O sinal da desigualdade muda de sentido.)

⟵ Adopta-se $\log_4$ no segundo membro da equação.

⟵ Iguala-se os logaritmandos dos dois membros da equação.

⟵ Adopta-se $\log_2$ no segundo membro da equação.

⟵ Iguala-se os logaritmandos dos dois membros da equação.

9.

Qual é a solução da equação $5^x + 5^{x+1} = 30$?

A. $x = 1$ B. $x = 2$ C. $x = 3$ D. $x = 4$

2008.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Resolvendo a equação, tem-se:

$5^x + 5^{x+1} = 30 \Leftrightarrow \mathbf{5^x} + \mathbf{5^x} \cdot 5 = 30$

$\Leftrightarrow \mathbf{5^x}(1+5) = 30 \Leftrightarrow 5^x \cdot 6 = 30$

$\Leftrightarrow 5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1$

Opção: A

⟵ $5^{x+1} = 5^x \cdot 5^1$ $\boxed{a^m a^n = a^{m+n}}$

⟵ Coloca-se o factor comum 5^x em evidência.

⟵ Como as bases são iguais, iguala-se os expoentes. $\boxed{a^p = a^q \Longleftrightarrow p = q}$

10.

Para que os pontos $(0;1)$, $(3;4)$ e $(2k;k)$ sejam colineares qual deve ser o valor de k?

A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

2008.1ªÉpoca

【**Resolução**】

A equação da recta que passa pelos pontos $(0;1)$ e $(3;4)$ é:

$y - 1 = \frac{4-1}{3-0}(x-0) \Leftrightarrow y = x+1$

Como esta recta também passa pelo $(2k;k)$, tem-se:

$k = 2k + 1 \Leftrightarrow k = -1$

Opção: B

⟵ A equação da recata que passa pelos dois pontos $(x_1;y_1)$ e $(x_2;y_2)$ é dada por: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

⟵ Substitui-se x por $2k$ e y por k em $y = x+1$.

11.

Sendo $\cos x = -\frac{1}{3}$, com $x \in 3°$ quadrante, qual é o valor de sen$x$?

A. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

2008.1ªÉpoca

【Resolução】

Na fórmula fudamental de trigonometria $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, substitui-se $\cos x$ por $-\frac{1}{3}$ e tem-se:

$$\text{sen}^2 x + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2 x = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \text{sen} x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como $x \in 3°$ quadrante, $\text{sen} x < 0$.

Por isso, tem-se: $\text{sen} x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Opção: C

⟵ **<Relações trigonométricas do mesmo ângulo>**

1. $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ **2.** $\text{tg}\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$

3. $1 + \text{tg}^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

<Sinal das razões trigonométricas>

⟵

α	1° Q	2° Q	3° Q	4° Q
senα	+	+	-	-
$\cos\alpha$	+	-	-	+
tgα	+	-	+	-
cotgα	+	-	+	-

12.

Se f e g são funções reais dadas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = \log_3(x+2)$, qual é o valor de $(g o f)(-1)$?

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

2008.1ªÉpoca

【Resolução】

$f(-1) = (-1)^3 = -1$

Então tem-se:

$$(g o f)(-1) = g[\boldsymbol{f(-1)}] = g(\boldsymbol{-1})$$
$$= \log_3(-1+2) = \log_3 1 = \log_3 3^0 = 0$$

Opção: B

⟵ Substitui-se x por -1 em $f(x) = x^3$.

⟵ **Função composta**: $(g o f)(x) = g[f(x)]$

⟵ Substitui-se x por -1 em $g(x) = \log_3(x+2)$.

$\boldsymbol{\log_a 1 = \log_a a^0 = 0}$

13.

Qual é a inversa da função $h(x) = \frac{1}{x+2}$?

A. $h^{-1}(x) = \frac{1-2x}{x}$ B. $h^{-1}(x) = \frac{1+2x}{x}$ C. $h^{-1}(x) = \frac{-1-2x}{x}$ D. $h^{-1}(x) = \frac{-1+2x}{x}$

2008.1ªÉpoca

【Resolução】

Substituindo $h(x)$ por y, tem-se: $y = \frac{1}{x+2}$

Resolve-se em ordem a x:

$$(x+2)y = 1 \Leftrightarrow xy = 1 - 2y \Leftrightarrow x = \frac{1-2y}{y}$$

Trocando as variáveis x por y e y por x, tem-se: $y = \frac{1-2x}{x}$, que é a função inversa pedida, $h^{-1}(x) = \frac{1-2x}{x}$.

Opção: A

⟵ **Passos para obter a expressão da função inversa**

1. Substitui-se $h(x)$ por y.
2. Resolve-se em ordem a x.
3. Trocam-se as variáveis x por y e y por x.

14.

Na função $f(x) = \frac{2x+2}{x+3}$ qual é a equação da assímptota horizontal?

A. $y = 2$ B. $y = 3$ C. $x = 2$ D. $x = 3$

2008.1ªÉpoca

【Resolução】

A função $f(x) = \frac{2x+2}{x+3} = \frac{\mathbf{2}\cdot x + 2}{\mathbf{1}\cdot x + 3}$ é homográfica.

Então a equação da assímptota horizontal é $y = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}} = 2$.

Opção: A

Uma função do tipo $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ é homográfica cujas assímptotas vertical e horizontal são dadas pelas seguintes equações:

★AV : $x = -\frac{d}{c}$ (⟵ Zero do denominador)

★AH : $y = \frac{a}{c}$ (⟵ Quociente dos coeficientes de x)

15.

Qual é o conjunto solução da inequação $-3 < |2x - 4| < 0$?

A. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 7\}$ B. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$ C. $x \in \{\ \}$ D. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

2008.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Como $|2x - 4| \geq 0$, então a inequação $-3 < |2x - 4| < 0$ não é possível em $\mathbb{R}$.

Portanto, a solução desta inequação é: $x \in \{\ \}$

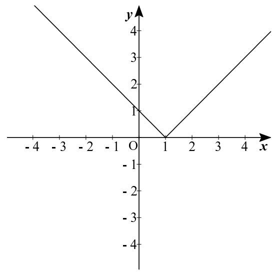
Opção: C

⟵ Um módulo de qualquer número é maior ou igual a zero, isto é: $\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0}$

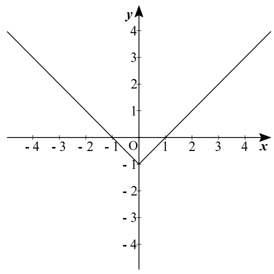
16.

Qual é o gráfico da fução $y = |x| - 1$?

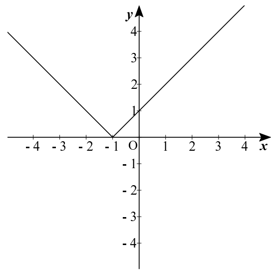
A.



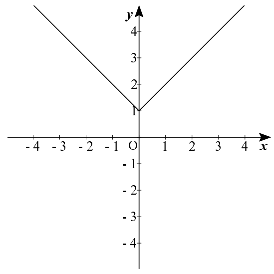
B.



C.



D.



2008.1ªÉpoca

【**Resolução**】

O gráfico de $y = |x|$ **− 1** obtém-se a partir do gráfico $y = |x|$ através da translação de **1** unidade para **baixo**. Então, o gráfico da função $y = |x| - 1$ é da opção B.

Opção: B

【**Outra resolução**】

Por exemplo, substituindo $x = \mathbf{0}$ em $y = |x| - 1$, tem-se: $y = \mathbf{-1}$

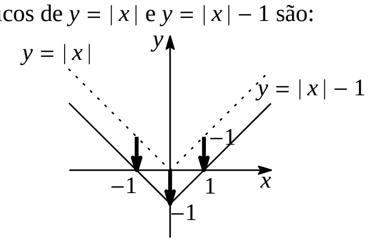
Portanto o gráfico da função passa pelo ponto (**0; −1**).

Verifica-se que só o gráfico da opção B passa pelo ponto $(0; -1)$.

Então, a solução é a opção B.

⟵ O gráfico da função $y = f(x - \boldsymbol{p}) + \boldsymbol{q}$ obtém-se a partir do gráfico da função $y = f(x)$ através da translação de $\boldsymbol{p}$ unidades para direita e $\boldsymbol{q}$ unidades para cima.

Os gráficos de $y = |x|$ e $y = |x| - 1$ são:



17.

Seja $f(x) = 1 + 4\text{sen}x$ uma função real de variável real. Qual é o conjunto de todas imagens da função $f(x)$?

A. $[-3, 5]$ B. $[-3, 4]$ C. $[3, 4]$ D. $[3, 5]$

2008.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Sabe-se que $\mathbf{-1 \leq \text{sen}\boldsymbol{x} \leq 1}$.

Multiplicando por 4 todos os membros da inequação, tem-se:

$$-4 \leq 4\text{sen}x \leq 4$$

Adicionando 1 a todos os membros da inequação, tem-se:

$$-3 \leq \mathbf{1 + 4sen}\boldsymbol{x} \leq 5 \Leftrightarrow -3 \leq \boldsymbol{f(x)} \leq 5$$

Por isso, o conjunto de todas imagens da função é: $[-3; 5]$

Opção: A

⟵ **Contradomínio das funções trigonométricas:**

- $-1 \leq \text{sen} f(x) \leq 1$
- $-1 \leq \cos f(x) \leq 1$
- $-\infty \leq \text{tg} f(x) \leq +\infty$

⟵ $f(x) = 1 + 4\text{sen}x$

18.

Qual é o termo geral da sucessão $(-1, 3, -5, 7, -9, \ldots)$?

A. $a_n = (2n + 1)(-1)^n$ B. $a_n = (2n - 1)(-1)^n$ C. $a_n = (2n + 1)(-1)^{n+1}$ D. $a_n = (2n - 1)(-1)^{n+1}$

2008.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Sejam $(a_n) = (-1, 3, -5, 7, -9, \dots)$,
$(b_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ e $(c_n) = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$.

Então tem-se: $a_n = b_n \cdot c_n$

Determina-se os termos gerais b_n e c_n:

Como (b_n) é uma PG em que $b_1 = -1$ e $q = -1$, o termo geral é: $b_n = (-1) \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^n$

Como (c_n) é uma PA em que $c_1 = 1$ e $d = 2$, o termo geral é:

$$c_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$$

Portanto o termo geral a_n da sucessão $(-1, 3, -5, 7, -9, \dots)$ é:

$$a_n = b_n \cdot c_n = (-1)^n(2n-1) = (2n-1)(-1)^n$$

Opção: B

⟵ $(-1, 3, -5, 7, -9, \dots)$
$= (-1 \cdot 1, 1 \cdot 3, -1 \cdot 5, 1 \cdot 7, -1 \cdot 9, \dots)$

⟵ O termo geral de uma **PG** é dado por $\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$.

⟵ O termo geral de uma **PA** é dado por $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$

19.

Qual das seguintes sucessões é uma progressão geométrica?

A. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \dots$ B. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \dots$

C. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$ D. $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \dots$

2008.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Para que seja uma PG, é necessário que o quociente entre dois termos consecutivos seja constante.

Destas opções, apenas a sucessão da opção C é uma PG porque o quociente entre dois termos consecutivos é constante $\frac{1}{2}$.

Opção: C

⟵ Uma sucessão é uma **PG** se o **quociente** entre dois termos consecutivos é constante.
Uma sucessão é uma **PA** se a **diferença** entre dois termos consecutivos é constante.

⟵ $1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{16}, \quad \dots$
$\times\frac{1}{2} \quad \times\frac{1}{2} \quad \times\frac{1}{2} \quad \times\frac{1}{2} \quad \times\frac{1}{2}$

20.

Se os números $6; 4x; 6x+4; \dots$ estão em progressão aritmética, qual é a soma dos oito primeiros termos?

A. 410 B. 420 C. 430 D. 440

2008.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Como $6; 4x; 6x+4; \dots$ estão em PA, a diferença entre dois termos consecutivos é constante. Portanto tem-se:

$$4x - 6 = (6x+4) - 4x \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$$

Substituindo x por 5 na sucessão $6; 4x; 6x+4; \dots$, tem-se:

$$6;\ 4 \cdot 5;\ 6 \cdot 5 + 4; \cdots = 6; 20; 34; \cdots$$

Como esta sucessão é uma PA em que $a_1 = 6$ e $d = 14$, a soma dos oito primeiros termos é:

$$S_8 = \frac{8[2 \cdot 6 + (8-1) \cdot 14]}{2} = 4 \cdot 110 = 440$$

Opção: D

⟵ Uma sucessão é uma **PA** se a **diferença** entre dois termos consecutivos é constante

⟵ O quociente entre dois termos 6 e $4x$ é: $4x - 6$
O quociente entre dois termos $4x$ e $6x+4$ é: $6x+4-4x$

⟵ $6, \quad 20, \quad 34, \quad \dots$
$+14 \quad +14 \quad +14$

⟵ A soma dos n primeiros termos de uma PA é dada por:
$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ ou $S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$

21.

Quanto à paridade a função $f(x) = |x|$ é...

A. Ímpar B. Par C. Ímpar e par D. Nem ímpar nem par

2008.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Substituindo x por $-x$ em $f(x) = |x|$, tem-se $f(-x)$:

$$f(-x) = |-x| = \boldsymbol{|-1 \cdot x| = |-1| \cdot |x|} = 1 \cdot |x| = f(x)$$

Como $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$, a função $f(x)$ é **par**.

Opção: B

⟵ Propriedade de módulo: $|ab| = |a| \cdot |b|$

⟵ Se $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$, então f é **par**.
Se $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$, então f é **ímpar**.

22.

A sucessão cujo termo geral é $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$ pode ser classificada em ...

A. convergente e infinitamente pequena
B. convergente e infinitamente grande
C. divergente e infinitamente pequena
D. divergente e infinitamente grande

2008.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Calcula-se o limite da sucessão a_n:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n = 0$, então a sucessão é convergente e infinitamente pequena.

Opção: A

★Uma sucessão a_n é convergente se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$.
★Uma sucessão é divergente se não é convergente.
★Uma sucessão a_n é infinitamente pequena se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
(Uma sucessão infinitamente pequena é convergente.)
★Uma sucessão a_n é infinitamente grande se $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$.
(Uma sucessão infinitamente grande é divergente)

23.

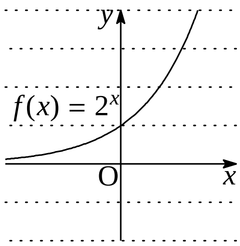
Qual das seguintes funcções é injectiva?

A. $f(x) = 2^x$ B. $f(x) = x^3 - x$ C. $f(x) = \cos x$ D. $f(x) = x^2 - 5x + 6$

2008.1ªÉpoca

【**Resolução**】

O gráfico da função $f(x) = 2^x$ da opção **A** representa uma função injectiva porque cada uma das rectas paralelas ao eixo de xx corta o gráfico em um só ponto ou não corta o gráfico.
Os gráfico das opções B, C e D não são injectivas nem sobrejectivas.



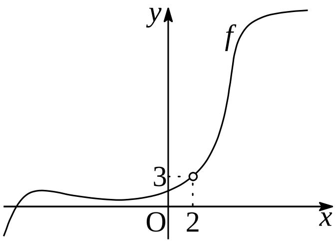
Opção: A

★ Se cada uma das rectas palalelas ao eixo de xx cortar o gráfico em **um só ponto ou não** cortar o gráfico de uma função, então a função é **injectiva**.
★ Se cada uma das rectas palalelas ao eixo de xx cortar o gráfico uma função em **um ou mais pontos**, então a função é **sobrejectiva**.
★ Se cada uma das rectas palalelas ao eixo de xx cortar o gráfico uma função em **um só ponto** , então a função é **bijectiva**. (Se uma função for simultaneamente injectiva e sobrejectiva, então a função é bijectiva.)

24.

A figura representa o gráfico de uma função $y = f(x)$. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?

A. 0
B. 2
C. 3
D. Não existe



2008.1ªÉpoca

【**Resolução**】

A partir da figura, tem-se: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 3$ e $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$

Como $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$, conclui-se que: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$

Opção: C

⟵ Quando $x \to 2^+$, $f(x)$ aproxima-se de 3
Quando $x \to 2^-$, $f(x)$ aproxima-se de 3.
⟵ • $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \alpha \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha$
• $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \Leftrightarrow \nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$

25.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x+1)^2(x+1)}{2x^3}$?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2008.1ªÉpoca

【Resolução】

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^2(x+1)}{2x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{(2x+1)^2(x+1)}{x^3}}{\dfrac{2\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}}$$

⟵ Para levantar a indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$, divide-se o numerador e o denominador pela potência máxima do denominador.

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{(2x+1)^2}{x^2}\cdot\dfrac{x+1}{x}}{2}$$

⟵ $\frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)^2\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{2}$$

⟵ $\frac{(2x+1)^2}{x^2} = \left(\frac{2x+1}{x}\right)^2$; $\quad \frac{x+1}{x} = 1+\frac{1}{x}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{2}$$

⟵ $\frac{2x+1}{x} = 2+\frac{1}{x}$

$$= \frac{(2+0)^2(1+0)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

⟵ Substitui-se x por ∞.

Opção: B

【Outra resolução】

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^2(x+1)}{2x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{(4x^2+4x+1)\cdot(x+1)}{2x^3}$$

⟵ Desenvolve-se $(2x+1)^2$ aplicando $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\mathbf{4x^3}+8x^2+5x+1}{\mathbf{2x^3}}$$

⟵ Se o numerador e o denominador de uma expressão algébrica racional fraccionária têm o mesmo grau, então o limite da expressão quando $x\to\infty$ é igual ao quociente dos coeficientes dos termos de maior grau.

$$= \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{2}} = 2$$

26.

Qual é o valor de $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2008.1ªÉpoca

【Resolução】

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to1}\frac{(\sqrt[3]{x})^3-1^3}{\sqrt[3]{x}-1}$$

⟵ $x = (\sqrt[3]{x})^3$ porque $(\sqrt[m]{a})^m = a$.

$$= \lim_{x\to1}\frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}[(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1]}{\cancel{\sqrt[3]{x}-1}}$$

⟵ Factoriza-se $(\sqrt[3]{x})^3 - 1^3$ aplicando $a^3 \pm b^3 = (a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

$$= \lim_{x\to1}[(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1]$$

$$= 1+1+1 = 3$$

⟵ Substitui-se x por 1

Opção: D

27.

Qual é o valor de $\lim_{x\to0}(1+\operatorname{sen}x)^{\frac{1}{x}}$?

A. e B. e^2 C. e^3 D. e^4

2008.1ªÉpoca

【Resolução】

$$\lim_{x\to0}(1+\operatorname{sen}x)^{\frac{1}{x}} = [1^\infty]$$

⟵ Para levantar a indeterminação do tipo 1^∞, utiliza-se a seguinte fórmula:
Sejam $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$. Então tem-se:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = [1^\infty] = e^{\lim_{x\to a}[f(x)-1]\cdot g(x)}$$

$$= e^{\lim_{x\to0}(1+\operatorname{sen}x-1)\cdot\frac{1}{x}}$$

$$= e^{\boldsymbol{\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}}}$$

$$= e^{\mathbf{1}} = e$$

⟵ **Limite notável**: $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x} = 1$

Opção: A

28.

Na função $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{se } x \le 0 \\ k-4, & \text{se } x > 0 \end{cases}$, qual é o valor de k de modo que seja contínua no ponto de abcissa $x = 0$?

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

2008.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Para que seja contínua no ponto de abcissa $x = 0$, é necessário que: $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = f(0)$

⟵ $f(x)$ é contínua no ponto de abcissa $x = a$ $\iff \exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ $\iff \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

O limite lateral de $f(x)$ à esquerda do ponto $x = 0$ é:

$$\lim_{x\to0^-} \boldsymbol{f(x)} = \lim_{x\to0^-} (\mathbf{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{3}) = 2\cdot0-3 = \mathbf{-3}$$

⟵ Quando $x \to 0^-$, isto é, $x < 0$, $f(x) = 2x-3$.

O limite lateral de $f(x)$ à direita do ponto $x = 0$ é:

$$\lim_{x\to0^+} \boldsymbol{f(x)} = \lim_{x\to0^+} (\boldsymbol{k} - \mathbf{4}) = \boldsymbol{k} - \mathbf{4}$$

⟵ Quando $x \to 0^+$, isto é, $x > 0$, $f(x) = k-4$.

O valor da função $f(x)$ no ponto $x = 0$ é:

$$f(0) = 2\cdot0-3 = \mathbf{-3}$$

⟵ Quando $x = 0$, $f(x) = 2x-4$.

Como estes valores são iguais, tem-se:

$$\boldsymbol{k} - \mathbf{4} = \mathbf{-3} \Leftrightarrow k = 1$$

Opção: C

29.

Dada a função $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \le 3 \\ 2x-4, & \text{se } x > 3 \end{cases}$, qual é a derivada da função $f(x)$ à direita de 3?

A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

2008.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Sabe-se que quando $x > 3$, $f(x) = 2x-4$.

Logo, a derivada da função $f(x)$ à direita é:

$$f'(3^+) = (2x-4)' = 2$$

⟵ $f'(3^-) = (x-1)' = 1$ porque $f(x) = x-1$ se $x \le 3$.

Opção: D

30.

Qual é a derivada da função $f(x) = 2x^3 - x + 5$ no ponto de abcissa $x = 1$?

A 5 B 6 C 7 D 8

2008.1ªÉpoca

【**Resolução**】

Calcula -se a derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = 2\cdot3x^2 - 1 + 0 = 6x^2 - 1$$

⟵ $\forall n \in \mathbb{N}, (x^n)' = nx^{n-1}$; $\forall c \in \mathbb{R}, (c)' = 0$

Então tem-se: $f'(1) = 6\cdot1^2 - 1 = 5$

⟵ Substitui-se x por 1 em $f'(x) = 6x^2 - 1$.

Opção: A

31.

Qual é a equação da recta tangente à curva da função $f(x) = e^x$ no ponto de abcissa $x = 0$?

A $y = -x+1$ B $y = x+1$ C $y = -x-1$ D $y = x-1$

2008.1ªÉpoca

【**Resolução**】

O valor de $f'(0)$ é igual ao declive da recta tangente à curva de $f(x) = e^x$ em $x = 0$.

⟵ O valor de $f'(a)$ é igual ao declive da recta tangente à curva de $f(x)$ em $x = a$.

Como $f'(x) = e^x$, então $f'(0) = e^0 = 1$.
Logo, o declive da recta tangente à curva de $f(x)$ em $x = 0$ é 1.
Como $f(0) = e^0 = 1$, a recta tangente passa pelo ponto $(0, 1)$.
Por isso, a equação da recta tangente é:

$$y - 1 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x + 1$$

Opção: B

⟵ $(e^x)' = e^x$

⟵ Seja $f(x)$ uma função. Se $f(a) = b$, então o gráfico da função $f(x)$ passa pelo ponto $(a; b)$.

⟵ A equação da recta tangente à curva no ponto $(a, f(a))$ é dada por $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

32.

Qual é a derivada da função $y = \text{sen}(2x^3 - 1)$?

A $y' = 6x^2\text{sen}(2x^3 - 1)$ B $y' = 6x\text{sen}(2x^3 - 1)$ C $y' = 6x^2 \cos(2x^3 - 1)$ D $y' = 6x \cos(2x^3 - 1)$

2008.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$$y' = [\text{sen}(2x^3 - 1)]' = \cos(2x^3 - 1) \cdot (2x^3 - 1)'$$
$$= \cos(2x^3 - 1) \cdot (2 \cdot 3x^2 - 0) = 6x^2 \cos(2x^3 - 1)$$

Opção: C

⟵ **Derivada da função composta**: $[\text{sen} f(x)]' = \cos f(x) \cdot f'(x)$ porque $(\text{sen}x)' = \cos x$.

33.

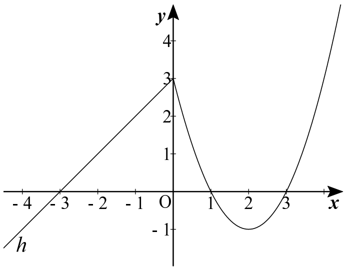
Na figura é dada a representação gráfica da função $h(x)$. Qual é o valor de $h'(-2)$?

A. -1

B. -2

C. 1

D. 2



2008.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$h'(-2)$ é igual ao declive da equação da recta tangente ao gráfico da função $h(x)$ em $x = -2$.
Pela leitura da figura, a recta tangente em $x = -2$ coincide com a recta que passa pelos dois pontos $(-3, 0)$ e $(0, 3)$.
O declive da recta que passa pelos pontos $(-3, 0)$ e $(0, 3)$ é:

$$\frac{3 - 0}{0 - (-3)} = 1$$

Por isso, obtém-se o valor de $h'(-2)$: $h'(-2) = 1$

Opção: C

⟵ O valor de $f'(a)$ é igual ao declive da recta tangente ao gáfico da função $f(x)$ no ponto $x = a$.

⟵ O declive (coeficiente angluar) da recta que passa pelos dois ponots (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

34.

Qual é a solução de $\dfrac{(n - 1)!}{(n - 2)!} = 24$?

A. 10 B. 15 C. 20 D. 25

2008.1ªÉpoca

【**Resolução**】

$$\frac{(n - 1)!}{(n - 2)!} = 24 \Leftrightarrow \frac{(n - 1)\cancel{(n - 2)!}}{\cancel{(n - 2)!}} = 24$$
$$\Leftrightarrow n - 1 = 24 \Leftrightarrow n = 25$$

Opção: D

◇ $n!$ é o produto de n facotores naturais e sucessivos desde n até 1. $\boldsymbol{n! = n(n - 1)(n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$

⟵$(n-1)! = (n-1)\underbrace{(n - 2)(n - 3) \cdots 2 \cdot 1}_{(n-2)!} = (n-1)(n-2)!$

35.

Com os algarismos $1, 3, 5$ e 7, quantos números de três algarismos diferentes podemos escrever?

A. 22 B. 23 C. 24 D. 25

2008.1ªÉpoca

【Resolução】

Deseja-se o número total das maneiras possiveis de extrair 3 elementos dentre 4 elementos e permutar os 3 elementos entre si. Como interessa a ordem, trata-se de um arranjo de 4 elemtos tomados 3 a 3, isto é:

$$A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Opção: C

⟵ A_n^p é o número total das maneiras possíveis de extrair p elementos dentre n elementos e permutar os p elementos entre si. Quando interessa ordem, trata-se de um arranjo.

⟵ $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!} = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ factores}}$

36.

Qual é a solução da equação $|2x-1| = |x-3|$?

A. $S=\left\{-2; -\dfrac{4}{3}\right\}$ B. $S=\left\{-2; \dfrac{4}{3}\right\}$ C. $S=\left\{2; \dfrac{4}{3}\right\}$ D. $S=\left\{-\dfrac{4}{3}; 2\right\}$

2008.1ªÉpoca

【Resolução】

$$|2x-1| = |x-3| \Leftrightarrow 2x-1 = x-3 \ \vee\ 2x-1 = -(x-3)$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \ \vee\ 3x = 4$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \ \vee\ x = \frac{4}{3}$$

Opção: B

⟵ **Equação modular do tipo $|A| = |B|$**:
$|A| = |B| \Leftrightarrow A = B \ \vee\ A = -B$

【Outra resolução】

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, tem-se:

$$(2x-1)^2 = (x-3)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = x^2 - 6x + 9$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (3x-4)(x+2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \vee x = -2$$

⟵ $|A| = |B| \Leftrightarrow A^2 = B^2$

⟵ Factoriza-se $3x^2 + 2x - 8$:

3	−4	⟶	−4
1	2	⟶	6
3	−8		2

37.

Qual é a negação da proposição $3 < 4$?

A. $3 > 4$ B. $3 \le 4$ C. $3 \ne 4$ D. $3 \ge 4$

2008.1ªÉpoca

【Resolução】

Como a negação de "<" é "≥", então:

$$\sim (3 < 4) = 3 \ge 4$$

Opção: D

⟵ **Exemplo**:
A negação da proposição $p : \forall x \in \mathbb{R} : x < -1 \vee x = 2$ é: $\sim p : \exists x \in \mathbb{R} : x \ge -1 \wedge x \ne 2$

38.

Dada a função $y = \text{sen}\left(\dfrac{kx}{2}\right)$, qual é o valor de k se o período da função é igual a π?

A 4 B 5 C 6 D 7

2008.1ªÉpoca

【Resolução】

O período da função $y = \text{sen}\left(\dfrac{\boldsymbol{k}x}{\mathbf{2}}\right)$ é: $\dfrac{2\pi}{\left|\dfrac{\boldsymbol{k}}{\mathbf{2}}\right|} = \dfrac{2\pi}{\dfrac{|k|}{2}} = \dfrac{4\pi}{|k|}$

Como este período é igual a π, tem-se:

$$\frac{4\pi}{|k|} = \pi \Leftrightarrow \frac{4}{|k|} = 1 \Leftrightarrow |k| = 4 \Leftrightarrow k = \pm 4$$

Opção: A

⟵ **Períodos de funções trigonométricas**:
Seja $k \in \mathbb{R}$.
★ Os períodos de $y = \text{sen}\,\boldsymbol{k}x$ e $y = \cos \boldsymbol{k}x$ são $\dfrac{\mathbf{2\pi}}{|\boldsymbol{k}|}$.
★ O período de $y = \text{tg}\,\boldsymbol{k}x$ é $\dfrac{\boldsymbol{\pi}}{|\boldsymbol{k}|}$.

39.

Observa a tabela:

Valor de x	1	2	3	4	5
Frequência de x	1	2	3	4	5

Qual é o valor da mediana de x?

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

2008.1ªÉpoca

【Resolução】

O número de dados é: $1+2+3+4+5=15$

Como o número de dados é ímpar, a mediana será o valor central.

$$\underbrace{1\ 2\ 2\ 3\ 3\ 3\ 4}_{\text{7 dados}}\ \boxed{4}\ \underbrace{4\ 4\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5}_{\text{7 dados}}$$

Logo, a mediana é 4.

Opção: C

⟵ A soma da frequência

⟵ Mediana é o valor que ocupa a posição central de um conjunto de dados ordenados.
Para determinar a mediana é preciso ordenar os dados. Se o número de dados é ímpar, então a mediana é o valor que ocupa a posição central dos dados ordenados. Se o número de dados é par, então a mediana é a média aritmética dos dois valores que ocupam a posição central dos dados ordenados.

40.

Ao escolher ao acaso um número inteiro no conjunto $\left\{-\frac{3}{2}; -1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2; 3; 4; 5; 6; 7\right\}$, qual é a probabilidade de ser par?

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{7}$ D. $\frac{3}{8}$

2008.1ªÉpoca

【Resolução】

O número de casos possíveis é 8 porque o acontecimento de escolher um número inteiro neste conjunto é $\{-1; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

O número de casos favoráveis é 3 porque o acontecimento de ser par é $\{2; 4; 6\}$.

Portanto, a probabiliddade pedida é $\frac{3}{8}$.

Opção: D

⟵ O conjunto $\{-1; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ contém 8 elementos.

⟵ $\mathbb{Z}$ = {Números inteiros} = $\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$

⟵ O conjunto $\{2; 4; 6\}$ contém 3 elementos.

⟵ A probabilidade de um acontecimento A é dada por:
$$P(A)=\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

FIM

República de Moçambique

Matemática | **Ministério de Educação e Cultura** | **2^a Época**

12^a Classe / 2008 | **Conselho Nacional de Exames, Certificação e Equivalências** | **120 Minutos**

Esta prova contém 40 perguntas com 4 alternativas de resposta para cada uma. Escolha a alternativa correcta e *RISQUE* a letra correspondente na sua folha de respostas.

【Resolução】

1.

Se as rectas $y = kx + b$ e $y = mx + n$ são perpendiculares entre si então...

A. $1 - km = 0$ B. $2 - km = 0$ C. $1 + km = 0$ D. $2 + km = 0$

2008. 2^a época

【**Resolução**】

Os declives das rectas $y = \boldsymbol{k}x + b$ e $y = \boldsymbol{m}x + n$ são respectivamente $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{m}$.

Como estas rectas são perpendiculares, tem-se:

$\boldsymbol{k \cdot m = -1} \Leftrightarrow 1 + km = 0$

Opção: C

⟵ O declive de uma recta $y = ax + b$ é $\boldsymbol{a}$.

⟵ Se m_1 e m_2 são declives das duas rectas **perpendiculares**, então tem-se: $\boldsymbol{m_1 \cdot m_2 = -1}$
Se m_1 e m_2 são declives das rectas **paralelas**, então tem-se: $\boldsymbol{m_1 = m_2}$

2.

Qual é a negação de $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$?

A. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0$ B. $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$ C. $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ D. $\exists! x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$

2008. 2^a época

【**Resolução**】

Pelas segundas leis de De Morgan, tem-se:

$\sim (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0)$ é $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$

Opção: D

⟵ **Segundas leis de De Morgan:**
Seja p uma proposição qualquer. Então:
★ $\sim (\forall x : p) = \exists x :\sim p$
★ $\sim (\exists x : p) = \forall x :\sim p$

3.

Sendo $f(x) = 2x$ e $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$, o domínio de $(gof)(x)$ é...

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ B. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ C. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ D. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$

2008. 2^a época

【**Resolução**】

Determina-se: $(gof)(x) = g[\boldsymbol{f(x)}] = g(\boldsymbol{2x}) = \dfrac{1}{\boldsymbol{2x} + 1}$

Então, o domínio de $(gof)(x)$ é:

$2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Opção: A

⟵ **Função composta**: $(gof)(x) = g[f(x)]$

⟵ O denominador é diferente de 0.

4.

Se $\forall x_1; x_2 \in D_f$ com $x_1 > x_2$ tivermos $f(x_1) > f(x_2)$ diz-se que a função $y = f(x)$ é...

A. bijectiva. B. crescente. C. decrescente. D. sobrejectiva.

2008. 2^a época

【**Resolução**】

Se $\forall x_1; x_2 \in D_f$ com $\boldsymbol{x_1 > x_2}$ tivermos $\boldsymbol{f(x_1) > f(x_2)}$ diz-se que a função $y = f(x)$ é **crescente.**

Opção: B

⟵ Se $\forall x_1; x_2 \in D_f$ com $\boldsymbol{x_1 > x_2}$ tivermos $\boldsymbol{f(x_1) < f(x_2)}$ diz-se que a função $y = f(x)$ é **decrescente**.

5.

Qual é a solução da equação $2^x + 2^{x+1} = 12$?

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8

2008. 2ª época

【Resolução】

$2^x + 2^{x+1} = 12 \Leftrightarrow \mathbf{2^x} + \mathbf{2^x} \cdot 2 = 12$ ⟵ $2^{x+1} = 2^x \cdot 2^1 = 2^x \cdot 2$ porque $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

$\Leftrightarrow \mathbf{2^x}(1+2) = 12 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x = 12$ ⟵ Coloca-se o factor comum 2^x em evidência.

$\Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow 2^{\boldsymbol{x}} = 2^{\mathbf{2}} \Leftrightarrow x = 2$ ⟵ $a^{\boldsymbol{m}} = a^{\boldsymbol{n}} \Leftrightarrow \boldsymbol{m = n}$

Opção: A

6.

O gráfico de uma função par é simétrico em relação...

A. à bissetriz do 1° e 3° quadrantes. B. à bissetriz do 2° e 4° quadrantes.
C. ao eixo das ordenadas. D. ao eixo das abcissas.

2008. 2ª época

【Resolução】

O gráfico de uma função **par** é simétrico em relação ao **eixo das ordenadas**.

⟵ O gráfico de uma função **ímpar** é simétrico em relação à **origem**.

Opção: C

7.

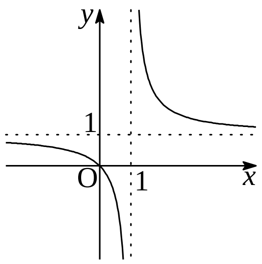
A figura representa o gráfico de uma função $y = f(x)$. Qual é a sua expressão analítica?

A. $y = \dfrac{1}{x+1} + 1$

B. $y = \dfrac{1}{x+1} - 1$

C. $y = \dfrac{1}{x-1} + 1$

D. $y = \dfrac{1}{x-1} - 1$



2008. 2ª época

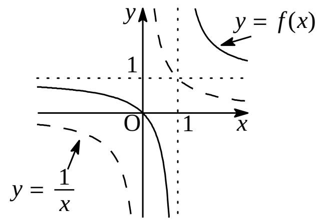
【Resolução】

A função $y = f(x)$ é homográfica.

Este gráfico obtém-se a partir do gráfico da função $y = \dfrac{1}{x}$ através da translação **1** unidade para direita e **1** unidade para cima porque o centro do gráfico é o ponto $(1; 1)$.

Por isso, a expressão analítica da função é: $y = \dfrac{1}{\mathbf{x-1}} + \mathbf{1}$

Opção: C

⟵ 

⟵ O gráfico da função $y = f(x - \boldsymbol{p}) + \boldsymbol{q}$ obtém-se a partir do gráfico de uma função $y = f(x)$ atráves de uma translação $\boldsymbol{p}$ unidades para direita e $\boldsymbol{q}$ unidades para cima.

8.

Qual é a derivada da função $h(x) = 2^x \cdot x^2$?

A. $2^x \cdot x(\ln 2 + 2)$ B. $2^x \cdot x(x \ln 2 + 2)$ C. $2^x \cdot x(x \ln x + 2)$ D. $2^x \cdot x(\ln x + 2)$

2008. 2ª época

【Resolução】

$h'(x) = (2^x \cdot x^2)' = (2^x)' \cdot x^2 + 2^x \cdot (x^2)'$ ⟵ $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$= 2^x \ln 2 \cdot x^2 + 2^x \cdot 2x$ ⟵ $(2^x)' = 2^x \ln 2$ aplicando $(a^x)' = a^x \ln a$

$= \mathbf{2^x x} \cdot x \ln 2 + \mathbf{2^x x} \cdot 2$

$= \mathbf{2^x x}(x \ln 2 + 2)$ ⟵ Coloca-se o factor comum $2^x x$ em evidência.

Opção: B

9.
Qual é o declive da recta tangente ao gráfico da função $g(x) = x^2 - 2x$ no ponto de abcissa $x = 2$?
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
2008. 2ª época

【**Resolução**】
O declive da recta tangente ao gráfico da função $g(x) = x^2 - 2x$ no ponto de abcissa $x = 2$ é igual ao valor de $g'(2)$.
Como $g'(x) = 2x - 2$, então tem-se: $g'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2$
Por isso, o declive pedido é 2.
Opção: C

⟵ O declive da recta tangente ao gráfico de uma função $y = f(x)$ em $x = \boldsymbol{a}$ é igual ao valor de $f'(\boldsymbol{a})$.

10.
O ângulo formado entre a recta de equação $x - y + 4 = 0$ e o sentido positivo do eixo das abcissas mede...
A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°
2008. 2ª época

【**Resolução**】
A equação $x - y + 4 = 0$ transforma-se em $y = x + 4$.
Seja α o ângulo pedido.
Como o declive da recta $y = x + 4$ é 1, tem-se: $\text{tg}\alpha = 1$
Resolvendo $\text{tg}\alpha = 1$, onde $0° \leq \alpha < 180°$, tem-se: $\alpha = 45°$
Opção: B

⟵ O declive da recta $y = ax + b$ é a.
⟵ Sejam m o declive de uma recta e α o ângulo formado entre esta recta e o sentido positivo do eixo de xx. Então tem-se: $\text{tg}\alpha = m$.

11.
A intersecção entre dois conjuntos disjuntos resulta no conjunto...
A. complementar. B. singular. C. universal. D. vazio.
2008. 2ª época

【**Resolução**】
A intersecção entre dois conjuntos disjuntos resulta no conjunto vazio porque não há intersecção entre dois conjuntos disjuntos.
Opção: D

⟵ Diz-se que dois conjuntos A e B são disjuntos se $A \cap B = \emptyset$.

12.
Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. A que é igual o complementar $A \cup B$?
A. $A \cup B$ B. $A \cap B$ C. $\overline{A} \cap \overline{B}$ D. $\overline{A} \cup \overline{B}$
2008. 2ª época

【**Resolução**】
O complementar $A \cup B$ é: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Opção: C

⟵ **Leis de De Morgan**:
★$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; ★$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

13.
Sabendo que $x + \dfrac{1}{x} = 10$, qual é o valor da expressão $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$?
A. 92 B. 94 C. 96 D. 98
2008. 2ª época

【**Resolução**】
$$x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x}$$
$$= 10^2 - 2 = 98$$
Opção: D

⟵ Aplica-se $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$
⟵ Substitui-se $x + \dfrac{1}{x}$ por 10.

14.

Em $\mathbb{R}$ qual é a solução da equação $\sqrt{x^2-5}=2$?

A. ± 3 B. ± 4 C. ± 5 D. ± 6

2008. 2ª época

【**Resolução**】

Antes da resolução, apresenta-se a condição:

$x^2-5\geq 0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -\sqrt{5} \vee \sqrt{5}\leq x$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, tem-se:

$\left(\sqrt{x^2-5}\right)^2=2^2 \Leftrightarrow x^2-5=4 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$

Como estes satisfazem a condição, a solução é: $x=\pm 3$

Opção: A

⟵ **Expressão algébrica irracional $\sqrt[n]{x}$:**
★Se o índice n é par, então $x\geq 0$
★Se o índice n é ímpar, então $x\in\mathbb{R}$.

⟵ $x=-3<-\sqrt{5}$ e $x=3>\sqrt{5}$.

15.

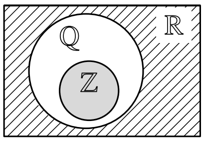
Qual das afirmações é verdadeira?

A. $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{Z}$ B. $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$ C. $\mathbb{R}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$ D. $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

2008. 2ª época

【**Resolução**】

A afirmação $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ da opção D é verdadeira.



Opção: D

⟵ $\mathbb{Z}$ = {Números inteiros}
$\mathbb{Q}$ = {Números racionais}
= $\mathbb{Z}\cup$ {Números fraccionários}
$\mathbb{R}$ = {Números reais}
= $\mathbb{R}\cup$ {Números irracionais}

16.

Em $\mathbb{R}$, a solução da equação $|3x-1|=-2$ é...

A. $\left\{-\frac{1}{3},1\right\}$ B. $\{\ \}$ C. $\{1\}$ D. $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

2008. 2ª época

【**Resolução**】

Como $|3x-1|\geq 0$, a equação $|3x-1|=-2$ é impossível em $\mathbb{R}$. Logo, a solução da equação é o conjunto vazio.

Opção: B

⟵ O módulo de qualquer número é sempre maior ou igual a zero, isto é $\boldsymbol{\forall x\in\mathbb{R}, |x|\geq 0}$.

17.

Em $\mathbb{R}$ qual é a solução da inequação $|2x-1|<3$?

A. $-1\leq x<2$ B. $-1<x<2$ C. $-1<x\leq 2$ D. $-1\leq x\leq 2$

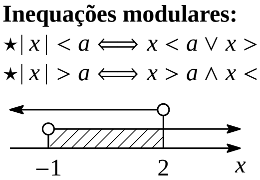
2008. 2ª época

【**Resolução**】

$|2x-1|<3 \Leftrightarrow 2x-1<3 \ \wedge\ 2x-1>-3$
$\Leftrightarrow 2x<4 \ \wedge\ 2x>-2$
$\Leftrightarrow x<2 \ \wedge\ x>-1$
$\Leftrightarrow -1<x<2$

Opção: B

⟵ **Inequações modulares:**
★$|x|<a \Longleftrightarrow x<a \vee x>-a$
★$|x|>a \Longleftrightarrow x>a \wedge x<-a$

⟵ 

18.

Qual é o valor numérico de $\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -2\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}$?

A. 4 B. 5 C. 6 D. 7

2008. 2ª época

【Resolução】

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 1 + 1\cdot(-2)\cdot 3 + (-1)\cdot 2\cdot(-2)$$
$$-[3\cdot 3\cdot(-1) + 2\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot(-2)\cdot(-2)]$$
$$= 1 - (-3) = 4$$

Opção: A

$\longleftarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - (gec + dbi + ahf)$

19.

Se x é um ângulo do primeiro quadrante e $\cos x = \dfrac{3}{5}$, então sen$x$ é igual a...

A. $\dfrac{4}{5}$ B. $\dfrac{2}{5}$ C. $-\dfrac{2}{5}$ D. $-\dfrac{4}{5}$

2008. 2ª época

【Resolução】

Substituindo $\cos x = \dfrac{3}{5}$ na fórmula fundamental de trigonometria $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, tem-se:

$$\text{sen}^2 x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2 x = \frac{16}{25} \Leftrightarrow \text{sen}x = \pm\frac{4}{5}$$

Como x é um arco do primeiro quadrante, $\text{sen}x > 0$.

Por isso, tem-se: $\text{sen}x = \dfrac{4}{5}$.

Opção: A

⟵ **<Relações trigonométricas do mesmo ângulo>**

1. $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ **2.** $\text{tg}\theta = \dfrac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$

3. $1 + \text{tg}^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

<Sinal das razões trigonométricas>

⟵

α	1° Q	2° Q	3° Q	4° Q
senα	+	+	-	-
$\cos\alpha$	+	-	-	+
tgα	+	-	+	-
cotgα	+	-	+	-

20.

Qual é o contradomínio da função $f(x) = -2^{x+2}$?

A. $\mathbb{R}$ B. $\mathbb{R}_0^+$ C. $\mathbb{R}_0^-$ D. $\mathbb{R}^-$

2008. 2ª época

【Resolução】

$f(x) = -2^{x+2} = -2^x \cdot 2^2 = -4\cdot 2^x$

Sabe-se que: $2^x > 0$

Multiplicando por -4 ambos os membros da inequação,tem-se:

$$-4\cdot 2^x < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0$$

Logo, o contradomínio da função $f(x) = -2^{x+2}$ é $\mathbb{R}^-$.

Opção: D

⟵ $2^{x+2} = 2^x \cdot 2^2$ aplicando $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

⟵ O contradomínio de uma função exponencial $y = a^x$ é $\mathbb{R}^+$, isto é, $a^x > 0$.

⟵ Como -4 é o número negativo, o sinal da desigualdade muda de sentido.

21.

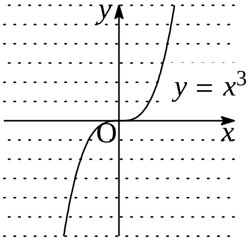
Qual das funções é injectiva?

A. $f(x) = x^2 + 4x$ B. $f(x) = x^3$ C. $f(x) = \text{tg}x$ D. $f(x) = \text{sen}x$

2008. 2ª época

【Resolução】

O gráfico da função $f(x) = x^3$ da opção B representa-se como a figura mostra.



Esta função é bijectiva porque cada uma das rectas paralelas ao eixo de xx corta o gráfico da função $f(x) = x^3$ em um só ponto.

Como a função $f(x) = x^3$ é bijectiva, então é injectiva.

Opção: B

★ Se cada uma das rectas palalelas ao eixo de xx cortar o gráfico em **um só ponto ou não** cortar o gráfico de uma função, então a função será **injectiva**.

★ Se cada uma das rectas palalelas ao eixo de xx cortar o gráfico uma função em **um ou mais pontos**, então a função será **sobrejectiva**.

★ Se cada uma das rectas palalelas ao eixo de xx cortar o gráfico uma função em **um só ponto** , então a função será **bijectiva**. (Se uma função for simultaneamente injectiva e sobrejectiva, então a função será bijectiva.)

22.

Qual é o termo geral da sucessão $(1; 3; 1; 3; 1; 3; \dots)$?

A. $U_n = 2n + 1$ B. $U_n = 2n - 1$ C. $U_n = (-1)^n + 2$ D. $U_n = (-1)^n - 2$

2008. 2ª época

【Resolução】

Substitui-se n de cada termo geral da sucessão das opções dadas por $1, 2, 3, \cdots$.

A. $U_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. Logo, não é correcta.
B. $U_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, $U_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$, $U_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$. Logo, não é correcta.
C. $U_1 = (-1)^1 + 2 = 1$, $U_2 = (-1)^2 + 2 = 3$
$U_3 = (-1)^3 + 2 = 1$, $U_4 = (-1)^4 + 2 = 3$, $U_5 = \cdots$
Logo, é correcta.
D. $U_1 = (-1)^1 - 2 = -3$. Logo, não é correcta.

Opção: C

⟵ Como $U_1 = 3 \neq 1$, a opção A não é correcta.
⟵ Como $U_3 = 5 \neq 1$, a opção B não é correcta.
⟵ Como $U_1 = 1, U_2 = 3, U_3 = 1, U_4 = 3, \dots$, a opção C é correcta.
⟵ Como $U_1 = 3 \neq 1$, a opção D não é correcta.

【Outra resolução】

$(1; 3; 1; 3; 1; 3; \dots) = (2 - 1; 2 + 1; 2 - 1; 2 + 1; 2 - 1; 2 + 1; \dots)$

Sejam $(a_n) = (1; 3; 1; 3; 1; 3; \dots)$;
$(b_n) = (-1; 1; -1; 1; -1; 1; \dots)$,

Então tem-se: $a_n = 2 + b_n$

Determina-se o termo geral da sucessão b_n:

Como o quociente (razão) entre dois termos consecutivos da sucessão b_n é constante -1, esta sucessão é uma PG em que $b_1 = -1$ e $q = -1$.

⟵ $-1 \xrightarrow{\times(-1)} 1 \xrightarrow{\times(-1)} -1 \xrightarrow{\times(-1)} 1 \xrightarrow{\times(-1)} -1 \xrightarrow{\times(-1)} 1 \dots$

Então, o termo geral desta PG é:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \Leftrightarrow b_n = (-1) \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^n$$

⟵ O termo geral de uma **PG** é: $\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$
O termo geral de uma **PA** é: $\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1)d}$

Por isso, o termo geral da sucessão a_n é:

$$a_n = 2 + b_n = 2 + (-1)^n = (-1)^n + 2$$

23.

Se $x - 3; x - 1; x + 3; \dots$ são os três primeiros termos de uma progressão geométrica, qual é o valor de x?

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

2008. 2ª época

【Resolução】

Como $x-3; x-1; x+3; \dots$ são os três primeiros termos de uma PG, é necessãrio que o quociente entre dois termos consecutivos seja constante. Por isso, tem-se:

$$\frac{x-1}{x-3} = \frac{x+3}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)^2 = (x-3)(x+3)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - 9 \Leftrightarrow -2x = -10 \Leftrightarrow x = 5$$

Opção: D

⟵ Uma **PG** é uma sucessão em que o **quociente** q entre dois termos consecutivos é constante.
Uma **PA** é uma sucessão em que a **diferença** d entre dois termos consecutivos é constante.
⟵ O quociente entre dois termos $x - 3$ e $x - 1$ é: $\frac{x-1}{x-3}$
O quociente entre dois termos $x - 1$ e $x + 3$ é: $\frac{x+3}{x-1}$

24.

Numa progressão aritmética finita o primeiro e o último termos são respectivamente 2 e 20. Se a soma dos seus termos é 110, quantos termos tem a sucessão?

A. 5 B. 10 C. 15 D. 20

2008. 2ª época

【Resolução】

Pela condição tem-se: $a_1 = 2$, $a_n = 20$ e $S_n = 110$

Aplicando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA, tem-se: $\frac{n(2+20)}{2} = 110 \Leftrightarrow 11n = 110 \Leftrightarrow n = 10$

Portanto, a sucessão tem 10 termos.

Opção: B

⟵ A soma dos n primeiros termos de uma PA é dada por:
$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ ou $S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$

25.

Qual é a solução da inequação $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) > \log_{\frac{1}{3}}(2x+3)$?

A. $x > -1$ B. $x < -1$ C. $x > 1$ D. $x < 1$

2008. 2ª época

【**Resolução**】

Antes da resolução, apresenta-se a condição:

$$x-1>0 \ \wedge\ 2x+3>0 \Leftrightarrow x>1 \ \wedge\ x>-\frac{3}{2} \Leftrightarrow x>1 \cdots ①$$

⟵ O logaritmando é positivo. $\log_a f(x) \Rightarrow$ Condição: $f(x) > 0$

Resolve-se a inequação $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) > \log_{\frac{1}{3}}(2x+3)$:

Como a base $\frac{1}{3}$ é menor que 1, o sinal da desigualdade muda de sentido. Então tem-se:

$$x-1 < 2x+3 \Leftrightarrow -x < 4 \Leftrightarrow x > -4 \cdots ②$$

⟵ Se $\boldsymbol{a > 1}$, então $\log_a \boldsymbol{X} < \log_a \boldsymbol{Y} \Leftrightarrow \boldsymbol{X} < \boldsymbol{Y}$. (O sinal da desigualdade mantem-se.) Se $\boldsymbol{0 < a < 1}$, então $\log_a \boldsymbol{X} < \log_a \boldsymbol{Y} \Leftrightarrow \boldsymbol{X} > \boldsymbol{Y}$. (O sinal da desigualdade muda de sentido.)

Calculando a intersecção das inequações ① e ②, tem-se: $x > 1$

Por isso, a solução da inequação é: $x > 1$

Opção: C

26.

Qual é o valor do $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x}$?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2008. 2ª época

【**Resolução**】

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1-\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$

⟵ Multiplicando pelo conjugado $1+\cos x$ de $1-\cos x$ o numerador e o denominador.

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x(1+\cos x)}{\boldsymbol{1-\cos^2 x}}$$

⟵ $(1-\cos x)(1+\cos x) = 1-\cos^2 x$ porque $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$.

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\operatorname{sen}^2 x}(1+\cos x)}{\cancel{\boldsymbol{\operatorname{sen}^2 x}}}$$

⟵ Como a fórmula fundamental da trigonometria é $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, então tem-se: $1-\cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$.

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{1} = \frac{1+\cos 0}{1} = \frac{1+1}{1} = 2$$

⟵ Substitui-se x por 0. $\cos 0 = 1$

Opção: B

【**Outra resolução**】

$$\lim_{x\to 0}\frac{\boldsymbol{\operatorname{sen}^2 x}}{1-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\boldsymbol{1-\cos^2 x}}{1-\cos x}$$

⟵ Como a fórmula funda mental da trigonometria é $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, então tem-se: $\operatorname{sen}^2 x = 1-\cos^2 x$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)}{\cancel{1-\cos x}}$$

⟵ Factoriza-se $1-\cos^2 x = (1-\cos x)(1+\cos x)$ aplicando $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$.

$$= \lim_{x\to 0}(1+\cos x)$$

$$= 1+\cos 0 = 2$$

⟵ Substitui-se x por 0. $\cos 0 = 1$.

27.

Qual é o valor do $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-7x+12}{2x^2}$?

A. 2,5 B. 3,5 C. 4,5 D. 5,5

2008. 2ª época

【**Resolução**】

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-7x+12}{2\boldsymbol{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^2-7x+12}{\boldsymbol{x^2}}}{\frac{2x^2}{\boldsymbol{x^2}}}$$

⟵ Para levantar a indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, divide-se o numerador e o denominador pela potência máxima do denominador.

Neste caso, como o denominador é do $\boldsymbol{2}^\circ$ grau, divide-se por x^2.

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{7}{x}+\frac{12}{x^2}}{2} = \frac{5-0+0}{2}$$

$$= \frac{5}{2} = 2,5$$

Opção: A

【Outra resolução】

Como o numerador e o denominador têm o mesmo grau, o limite quando $x \to \infty$ é o quociente dos coeficientes dos termos de maior grau.

Por isso, tem-se:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbf{5}x^2 - 7x + 12}{\mathbf{2}x^2} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}.$$

⟵ Se o numerador e o denominador de uma expressão algébrica racional fraccionária têm o mesmo grau, então o limite da expressão quando $x \to \infty$ é igual ao quociente dos coeficientes dos termos de maior grau, isto é: $\lim_{x\to\infty} \frac{\boldsymbol{a_1}x^n + b_1x^{n-1} + c_1x^{n-2} + \cdot}{\boldsymbol{a_2}x^n + b_2x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \cdots} = \frac{\boldsymbol{a_1}}{\boldsymbol{a_2}}$

28.

A função $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$, no ponto de abcissa $x = 3$ é...

A. contínua. B. crescente. C. descontínua. D. derivável.

2008. 2ª época

【Resolução】

Como o denominador é diferente de zero, o domínio da função $g(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ é: $x \neq 3$

Por isso, a função $g(x)$ não está definida em $x = 3$, ou seja, não existe $g(3)$.

Logo, a função $g(x)$ no ponto de abcissa $x = 3$ é descontínua.

Opção: C

★ Uma função f é contínua no ponto $x = a$
$\Leftrightarrow \exists f(a), \exists \lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
$\Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x^t oa^+} f(x) = f(a)$

★ Uma função f é descontínua em $x = a$ se a função não é contínua nesse ponto.

29.

Qual é a equação da assímptota horizontal do gráfico da função $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$?

A. $y = 1$ B. $y = 2$ C. $y = 3$ D. $y = 4$

2008. 2ª época

【Resolução】

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\boldsymbol{x^2} - 4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{\boldsymbol{x^2}}}{\frac{x^2-4}{\boldsymbol{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{\boldsymbol{x^2} - 4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2}{\boldsymbol{x^2}}}{\frac{x^2-4}{\boldsymbol{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1$$

Então, como $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \mathbf{1}$ e $\lim_{x\to-\infty} h(x) = \mathbf{1}$, $y = \mathbf{1}$ é uma assímptota horizontal do gráfico da função $h(x)$.

Opção: A

⟵ Divide-se o numerador e o denominador pela potência máxima do denominador.

A recta $x = a$, com $a \in \mathbb{R}$ é uma assímptota vertical (AV) do gráfico da função $y = f(x)$ se:
$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) ou $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)

A recta de equação $y = b$, com $b \in \mathbb{R}$, é uma assímptota horizontal (AH) do gráfico da função $y = f(x)$ se:
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$.

30.

Em qual dos intervalos a função $f(x) = x^3 - 3x$ é decrescente?

A. $]-3;-1[$ B. $]-1;1[$ C. $]-1;2[$ D. $]-1;3[$

2008. 2ª época

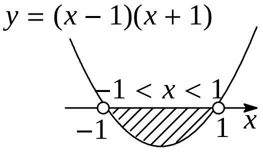
【Resolução】

Para que $f(x)$ seja decrescente num intervalo, é necessário que $f'(x) < 0$ nesse intervalo.

Resolve-se a inequação $f'(x) < 0$:

Como $f'(x) = 3x^2 - 3$, tem-se:

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 &\Leftrightarrow 3x^2 - 3 < 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x+1) < 0 \\ &\Leftrightarrow -1 < x < 1 \end{aligned}$$

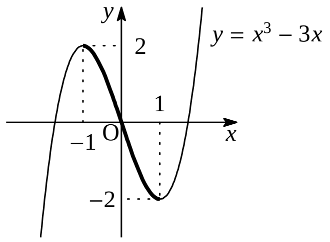


Por isso, $f(x)$ é decrescente no intervalo $]-1;1[$.

Opção: B

⟵ Se $f(x) > 0$, então $f(x)$ é crescente.
Se $f(x) < 0$, então $f(x)$ é decrescente.

O gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x$ representa-se:



【**Outra resolução**】

Determina-se $f'(x)$: $f'(x) = 3x^2 - 3$

Calcula-se os zeros da derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Constroi-se a tabela de monotonia e extremos:

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	Máx	$\searrow$	Mín	$\nearrow$

A partir da tabela, conclui-se que $f(x)$ é decrescente no intervalo $]-1;1[$.

$\longleftarrow$ $(x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3$ aplicando $\forall n \in \mathbb{R}, (x^n)' = nx^{n-1}$.

$\longleftarrow$ Há possibilidade de ter extremos para $x = \pm 1$.

$\longleftarrow$ ★ Se $\boldsymbol{f'(a) = 0}$ e $f'(x)$ passa no ponto $x = a$ de **negativa a positiva**, $f(x)$ tem para $x = a$ um **mínimo** extremo.
★ Se $\boldsymbol{f'(a) = 0}$ e $f'(x)$ passa no ponto $x = a$de **positiva a negativa**, $f(x)$ tem para $x = a$ um **máximo** extremo.

31.

Qual é o valor numérico da expressão $\dfrac{20!}{18! \cdot 20}$?

A. 18 B. 19 C. 20 D. 21

2008. 2ª época

【**Resolução**】

$$\frac{20!}{18! \cdot 20} = \frac{\cancel{20} \cdot 19 \cdot \cancel{18!}}{\cancel{18!} \cdot \cancel{20}} = 19$$

Opção: B

$\longleftarrow$ $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$
Logo, tem-se: $20! = 20{\cdot}19{\cdot}\underbrace{18\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}_{18!} = 20{\cdot}19{\cdot}18!$

32.

Seja $f(x) = x^2$ uma função definida no $[-2;2]$. Qual é o contradomínio da função $g(x) = 2f(x) + 3$?

A. $[2;3]$ B. $[2;5]$ C. $[3;5]$ D. $[3;11]$

2008. 2ª época

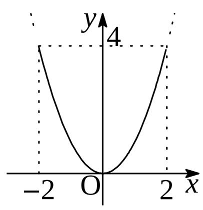
【**Resolução**】

Pela leitura da figura, o contradomínio da função $f(x) = x^2$ em $[-2;2]$ é $[0;4]$.

Em seguida, determina-se o contradomínio de $g(x)$:

$$0 \le f(x) \le 4 \Leftrightarrow 0 \le 2f(x) \le 8$$
$$\Leftrightarrow 3 \le \boldsymbol{2f(x)+3} \le 11$$
$$\Leftrightarrow 3 \le \boldsymbol{g(x)} \le 11$$

Por isso, o contradomínio de $g(x)$ é $[3;11]$



Opção: D

$\longleftarrow$ O ponto do vértice da função $f(x) = x^2$ são $(0;0)$ porque $f(x) = x^2 = (x-0)^2 + 0$.

$\longleftarrow$ Multiplica-se por 2 todos os membros da inequação.

$\longleftarrow$ Adiciona-se 3 a todos os membros da inequação.

33.

Para que o polinómio $2x^4 + px^2 - 3x + 1$ seja divisível por $x - 2$ o valor de p deve ser igual a...

A. $-\dfrac{27}{4}$ B. $-\dfrac{27}{2}$ C. $\dfrac{27}{4}$ D. $\dfrac{27}{2}$

2008. 2ª época

【**Resolução**】

Seja $P(x) = 2x^4 + px^2 - 3x + 1$. Para que o polinómio $P(x)$ seja divisível por $x - 2$, é necessário que: $P(2) = 0$

Tem-se:

$$P(2) = 2 \cdot 2^4 + p \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = 32 + 4p - 6 + 1 = 4p + 27$$

Por isso, tem-se:

$$4p + 27 = 0 \Leftrightarrow 4p = -27 \Leftrightarrow p = -\frac{27}{4}$$

Opção: A

$\longleftarrow$ Se um polinómio $P(x)$ for divisível por $x - a$, então tem-se: $P(a) = 0$

$\longleftarrow$ Substitui-se x por 2 em $P(x) = 2x^4 + px^2 - 3x + 1$.

【Outra resolução】

	2	0	p	-3	1
2		4	8	$2p+16$	$4p+26$
	2	4	$p+8$	$2p+13$	$\boxed{\mathbf{4p+27}}$

A partir da regra de Ruffini, obtém-se o resto $4p+27$.
Para que o polinómio seja divisível por $x-a$, o resto deve ser igual a zero.

Por isso, tem-se: $4p+27=0 \Leftrightarrow 4p=-27 \Leftrightarrow p=-\dfrac{27}{4}$

A regra de Ruffini é utilizada para determinar o quociente e o resto de divisão dum polinómio por um binómio do 1° grau.

⟵Quociente: $2x^3+4x^2+(p+8)x+2p+13$
Resto: $2p+27$

⟵Diz-se que um polinómio $P(x)$ é divisível por um polinómio $Q(x)$ se o resto da divisão de $P(x)$ por $Q(x)$ é zero.

34.

Se $\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+2}=\dfrac{3x-2}{x^2-4}$ então os valores de A e B são respectivamente...

A. -2 e -1 B. -1 e -2 C. 1 e 2 D. 2 e 1

2008. 2ª época

【Resolução】

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\frac{Ax+2A+Bx-2B}{x^2-4}$$
$$=\frac{(A+B)x+(2A-2B)}{x^2-4}$$

⟵ $m.m.c(x-2, x+2)$ é: $(x-2)(x+2)$

⟵ Ordena-se segundo as potências de x

Então tem-se:
$$\frac{(A+B)x+(2A-2B)}{x^2-4}=\frac{3x-2}{x^2-4}$$
$$\Leftrightarrow (A+B)x+(2A-2B)=3x-2$$

⟵ Iguala-se os numeradores dos dois membros da equação.

Para que esta igualdade seja verdadeira, os coeficientes dos termos do mesmo grau dos seus dois membros devem ser iguais.
Logo, tem-se:

⟵ Dois polinómios $P(x)$ e $Q(x)$ são **idênticos** se e só se os coeficientes dos termos do mesmo grau de x são iguais.

$$\begin{cases} A+B=3 & \cdots ① \\ 2A-2B=-2 \Leftrightarrow A-B=-1 & \cdots ② \end{cases}$$

⟵ Iguala-se os coeficientes dos termos do meso grau.

Calculando ① + ②, tem-se: $2A=2 \Leftrightarrow A=1$
Substituindo A por 1 na equação ①, tem-se: $1+B=3 \Leftrightarrow B=2$
Portanto, os valores de A e B respectivamente são 1 e 2.

⟵
$$\begin{array}{rrcrcr} & A & + & B & = & 3 \\ +) & A & - & B & = & -1 \\ \hline & 2A & & & = & 2 \end{array}$$

Opção: C

35.

Qual é a inversa da função $h(x)=\dfrac{x}{x+1}$?

A. $h^{-1}(x)=\dfrac{x}{x+1}$ B. $h^{-1}(x)=\dfrac{x}{x-1}$ C. $h^{-1}(x)=\dfrac{x}{-x-1}$ D. $h^{-1}(x)=\dfrac{x}{-x+1}$

2008. 2ª época

【Resolução】

Substituindo $h(x)$ por y, tem-se: $y=\dfrac{x}{x+1}$

Resolve-se em ordem a x:
$$y=\frac{x}{x+1} \Leftrightarrow (x+1)\cdot y=x \Leftrightarrow xy-x=-y$$
$$\Leftrightarrow x(y-1)=-y \Leftrightarrow x=\frac{-y}{y-1} \Leftrightarrow x=\frac{y}{-y+1}$$

Trocando as variáveis x por y e y por x, tem-se: $y=\dfrac{x}{-x+1}$, que é a função inversa pedida, $h^{-1}(x)=\dfrac{x}{-x+1}$.

⟵ **Passos para obter a expressão da função inversa**
1. Substitui-se $h(x)$ por y.
2. Resolve-se em ordem a x.
3. Trocam-se as variáveis x por y e y por x.

Opção: D

36.

Numa caixa contendo 20 pacotes de bolachas enumerados de um a vinte, extraiu-se um ao acaso. Qual é a probabilidade de o número do pacote extraído ser um divisor de 20?

A. $0,1$ B. $0,2$ C. $0,3$ D. $0,4$

2008. 2ª época

【**Resolução**】

O conjunto dos divisores de 20 é: $\{1; 2; 4; 5; 10; 20\}$

Então, o número de casos favoráveis é 6. ⟵ Os elementos do conjunto $\{1; 2; 4; 5; 10; 20\}$ são 6.

E o número de casos possíveis é 20.

Por isso, a probabilidade procurada é: $\dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10} = 0,3$ ⟵ Probabilidade$=\dfrac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$

Opção: C

37.

Se as alturas de Maria e Teresa são respectivamente $1,7$ e $1,3$, qual é a variância?

A. $0,02$ B. $0,04$ C. $0,08$ D. $0,09$

2008. 2ª época

【**Resolução**】

A média aritmética é:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2}{N} = \frac{1.7 + 1.3}{2} = 1,5$$

⟵ Dados $x_1, x_2, \cdots, x_N$, N valores de uma distribuição, então a média aritmética é dada por:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_N}{N}$$

Logo, a variância é:

$$v = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2}{N} = \frac{(1,7 - 1,5)^2 + (1,3 - 1,5)^2}{2}$$

$$= \frac{0.04 + 0.04}{2} = 0.04$$

⟵ A variância é dada por:

$$v = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_N - \overline{x})^2}{N}$$

Opção: B

38.

Na função $f(x) = \begin{cases} x - 2 \ ; & x \leq -3 \\ a \ ; & x > -3 \end{cases}$, qual é o valor de a para que $f(x)$ seja contínua em $\mathbb{R}$?

A. -5 B. -4 C. -3 D. -2

2008. 2ª época

【**Resolução**】

Para que a função $f(x)$ seja contínua em $\mathbb{R}$, é necessário que seja contínua em $x = -3$. ⟵ O gráfico de $f(x)$ muda-se em $x = -3$.

Então, para que f seja contínua em $x = -3$, é necessário que:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^+} f(x) = f(-3)$$

⟵ Uma função f é contínua no ponto $x = a$
$\Leftrightarrow \exists f(a), \exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Em $x = -3$, tem-se:

O limite lateral à esquerda de $x = -3$ é:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} (x - 2) = -3 - 2 = \mathbf{-5}$$

⟵ Quando $x \to -3^-$, isto é $x < -3$, $f(x) = x - 2$.

O limite lateral à direita de $x = -3$ é:

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} a = \boldsymbol{a}$$

⟵ Quando $x \to -3^+$, isto é, $x > 3$, $f(x) = a$

O valor da função no ponto $x = -3$ é: $f(-3) = -3 - 2 = \mathbf{-5}$ ⟵ $f(x) = x - 2$, se $x = -3$

Como estes valores são iguais, tem-se: $a = -5$

Opção: A

39.

A Julieta possui duas saias e três blusas. Se nunhum dos vestes é igual ao outro, de quantas maneiras diferentes ela pode vestir-se?

A. 3 B. 6 C. 12 D. 24

2008. 2ª época

【**Resolução**】

Deseja-se o número total das maneiras diferentes possíveis de escolher 1 saia dentre 2 saias e escolher 1 blusa dentre 3 saias. Isto é:

$$C_2^1 \cdot C_3^1 = 2 \cdot 3 = 6$$

Opção: B

⟵ $\mathbf{C_n^p}$ é o número total das maneiras possíveis de **escolher** p elementos dentre n elementos. Quando **não interessa ordem**, trata-se de uma combinação.

$C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p(p-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$

No caso especial, tem-se: $C_n^1 = n$

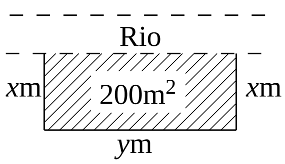
40.

O senhor Víctor pretende comprar rede para vedar uma machamba rectangular de 200m^2, situada ao longo de um rio. Não sendo necessário vedar o lado do rio e desejando que o perímetro da vedação seja mínimo, qual é a quantidade de rede a comprar?

A. 20m B. 30m C. 40m D. 50m

2008. 2ª época

【**Resolução**】



Sejam x e y os comprimentos de dois lados da machamba como a figura mostra. Então $x > 0$ e $y > 0$.

Então, tem-se: $x \cdot y = 200 \cdots ①$

⟵ porque a área da machamba rectangular é 200m^2.

Como não é necessário vedar o lado do rio, o perímetro da vedação é $2x + y$. Então, calcula-se o mínimo de $2x + y$:

⟵ $x + y + x = 2x + y$

Por ①, como $y = \dfrac{200}{x}$, tem-se: $2x + \boldsymbol{y} = 2x + \boldsymbol{\dfrac{200}{x}}$

⟵ $xy = 200 \Leftrightarrow y = \dfrac{200}{x}$

Sendo $f(x) = 2x + \dfrac{200}{x}$, tem-se: $f'(x) = 2 - \dfrac{200}{x^2}$

⟵ $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$

Resolvendo $f'(x) = 0$, tem-se:

$$2 - \frac{200}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 200 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = \pm 10$$

Então, constroi-se a tabela de monotonia e extremos:

x	0	$\cdots$	10	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	Mín	↗

⟵ ★ Se uma função $f(x)$ tem **derivada nula** para $x = a$ (ou seja $\boldsymbol{f'(a) = 0}$) e $f'(x)$ passa nesse ponto de **negativa a positiva**, a função $f(x)$ tem para $x = a$ um extremo **mínimo**.
★ Se uma função $f(x)$ tem **derivada nula** para $x = a$ (ou seja $\boldsymbol{f'(a) = 0}$) e $f'(x)$ passa nesse ponto de **positiva a negativa**, a função $f(x)$ tem para $x = a$ um extremo **máximo**.

Pela leitura da tabela, conclui-se que $f(x)$ tem o extremo mínimo em $x = 10$. Neste caso, o extremo mínimo é o mínimo absoluto da função $f(x)$.

Logo, o mínimo de $f(x)$ é $f(10) = 20 + \dfrac{200}{100} = 20 + 20 = 40$.

Opção: C

FIM

Ficha técnica

Título: FAZER EXAME COM CERTEZA
Impressão e Acabamento: PHOTOCOPY TECHNOLOGY XAI-XAI

Autores:

Takaaki Kamioka

Natural de Miyoshi, província de Hiroshima, licenciou-se em Ensino de Matemática pela Universidade Chiba-Japão em 2008, Mestrado em Ensino de Matemática pela Universidade Chiba-Japão em 2010.
Actualmente é voluntário da JICA (Agência Japonesa de Cooperação Internacional) e docente de Matemática na Escola Secundária Joaquim Chissano-Cidade Xai-Xai.

Bernardo Novela

Natural de Chibuto, província de Gaza, formou-se em 1981 como professor primário no Centro de Formação de Professores Primários de Inhamissa (CFPPI)-Cidade de Xai-Xai. Em 1991, concluiu o Ensino Pré-Universitário em Ciências na Escola Pré-Universitária de Nwachicolwane-Chókwè. Licenciou-se em Ensino de Matemática e Física na Universidade Pedagógica-Maputo em 2005. Leccionou na Escola Primária Marien Ngouaby-Cidade de Xai-Xai, na Escola Primária Anexa ao CFPPI-Cidade de Xai-Xai, no Centro de Formação de Professores Primários de Chicuque-Maxixe, no Centro de Formação de Professores Primários de Inhamissa-Cidade de Xai-Xai, na Escola Secundária da Polana-Maputo, na Escola Secundária da Maxaquene-Maputo, na Escola Secundária Josina Machel-Maputo. Colaborou na Secção Pedagógica da direcção da Escola Primária Marien Ngouaby-Cidade de Xai-Xai, da Escola Primária Anexa ao Centro de Formação de Professores Primários de Inhamissa-Cidade de Xai-Xai, do Centro de Formação de Professores Primários de Inhamissa-Cidade de Xai-Xai, do Instituto de Formação de Professores Eduardo Chivambo Mondlane-Cidade Xai-Xai.
Actualmente, é docente efectivo de Matemática na Escola Secundária Joaquim Chissano-Cidade de Xai-Xai, onde colabora como Delegado de Matemática do 2º Ciclo do Curso Nocturno e docente a tempo parcial de Matemática na Universidade Pedagógica de Moçambique-Delegação de Gaza.

João Mário Cuinica

Natural de Chibuto, província de Gaza, licenciou-se em Ensino de Matemática pela Universidade Pedagógica (UP) em 2007. Leccionou na Escola Primária Unidade 1 Patrice Lumumba-Cidade de Xai-Xai.
Actualmente, é docente de Matemática na Escola Secundária Joaquim Chissano-Cidade de Xai-Xai, onde colabora como Delegado de Matemática do 2º Ciclo do Curso Diurno e Membro da CAP.

Patrocínios: Direcção Provincial de Educação e Cultura de Gaza
Agência Japonesa de Cooperação Internacional (JICA)
Escola Secundária Joaquim Chissano-Cidade Xai-Xai
Tiragem: 110 exemplares

Xai-Xai, Desembro 2012

MOÇAMBIQUE

HINO NACIONAL

Pátria Amada

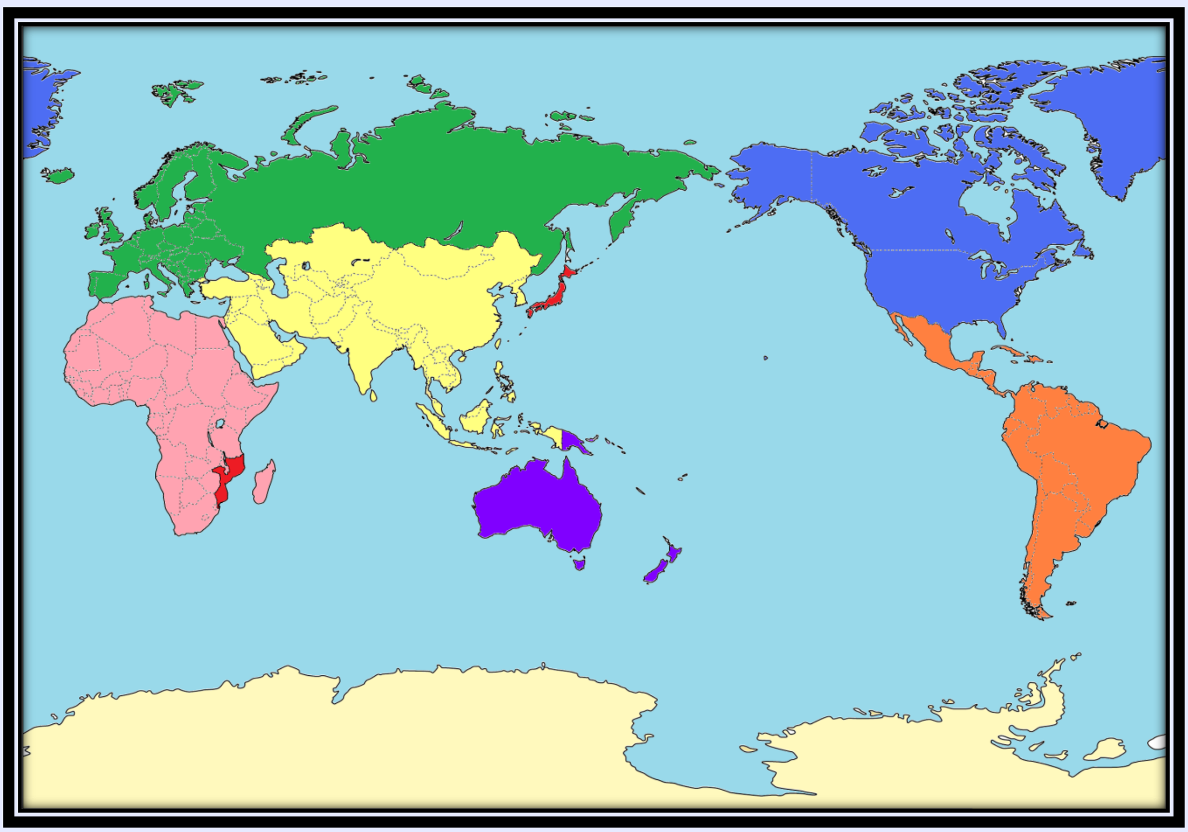
Na memória de África e do Mundo
Pátria bela dos que ousaram lutar
Moçambique, o teu nome é liberdade
O Sol de Junho para sempre brilhará.

Coro

Moçambique nossa terra gloriosa
Pedra a pedra construindo um novo dia
Milhões de braços, uma só força
Oh pátria amada, vamos vencer

Povo unido do Rovuma ao Maputo
Colhe os frutos do combate pela paz
Cresce o sonho ondulando na bandeira
E vai lavrando na certeza do amanhã.

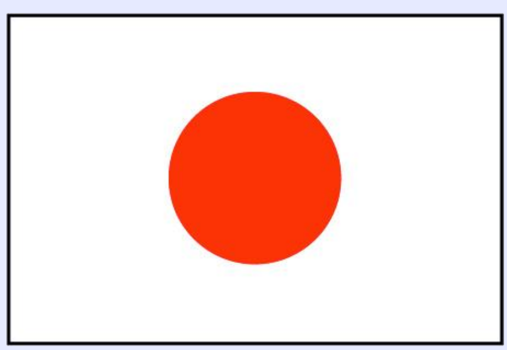
Flores brotando do chão do teu suor
Pelos montes, pelos rios, pelo mar
Nós juramos por ti, oh Moçambique
Nenhum tirano nos irá escravizar:



HINO NACIONAL

君が代

君が代は
千代に八千代に
さざれ石の
巌となりて
苔のむすまで



JAPÃO