FILOSCHOOL

1 Equação Linear de primeira Ordem

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{1}$$

Vou apresentar um algoritmo muito usado para a resolução de equações deste tipo , começando pelo exemplo abaixo:

$$\left(1 + x^2\right) \cdot \frac{dy}{dx} + y = \tan^{-1}(x) \tag{2}$$

Vamos dividir a equação (2) por $(1 + x^2)$:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{1 + x^2} \cdot y = \frac{\tan^{-1}(x)}{1 + x^2}$$

Observando atentamente, nota-se que a equação acima tem o formato da equação (1) , onde:

$$P(x) = \frac{1}{1 + x^2} \ e \ Q(x) = \frac{\tan^{-1}(x)}{1 + x^2}$$

Estando no formato da equação (1) , vamos pegar na parte homogénea da equação não homogénea e vamos encontrar a solução da homogénea (primeiro passo do algoritmo):

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{1 + x^2} \cdot y = 0$$

Resolvendo a equação por separação de variáveis:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2} \cdot y$$

$$\Longleftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1 + x^2}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \int \frac{dy}{y} &= -\int \frac{dx}{1+x^2} \\
\ln(y) &= -\tan^{-1}(x) + C \\
y &= e^{C-\tan^{-1}(x)} = e^{C} \cdot e^{-\tan^{-1}(x)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{y = C \cdot e^{-\tan^{-1}(x)}} \tag{3}$$

Encontrada a solução da homogénea, vamos derivar a solução, considerando que C é uma função de x (segunda parte do Algoritmo) . Pela regra do produto vamos ter:

$$\begin{aligned}
\frac{y}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(C(x) \cdot e^{-\tan^{-1}(x)}\right) = \frac{dC}{dx} \cdot e^{-\tan^{-1}(x)} + C \cdot \frac{d}{dx}\left(e^{-\tan^{-1}(x)}\right) \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{dC}{dx} \cdot e^{-\tan^{-1}(x)} + C \cdot e^{-\tan^{-1}(x)} \cdot \frac{d}{dx}\left(-\tan^{-1}(x)\right) \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{dC}{dx} \cdot e^{-\tan^{-1}(x)} - \frac{C}{1+x^2} \cdot e^{-\tan^{-1}(x)} \qquad (4)
\end{aligned}$$

Peguemos nas equações (3) e (4) , vamos substituir na equação (2) de modo a encontrar o $C(x)$:

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \left[\frac{dC}{dx} \cdot e^{-\tan^{-1}(x)} - \frac{C}{1+x^2} \cdot e^{-\tan^{-1}(x)}\right] + \frac{1}{1+x^2} C \cdot e^{-\tan^{-1}(x)} &= \frac{\tan^{-1}(x)}{1+x^2} \\
\Longleftrightarrow \frac{dC}{dx} \cdot e^{-\tan^{-1}(x)} &= \frac{\tan^{-1}(x)}{1+x^2} \\
\Longleftrightarrow \frac{dC}{dx} = \frac{\tan^{-1}(x)}{1+x^2} \cdot \frac{1}{e^{-\tan^{-1}(x)}} &= \frac{\tan^{-1}(x) \cdot e^{\tan^{-1}(x)}}{1+x^2} \\
dC &= \frac{\tan^{-1}(x) \cdot e^{\tan^{-1}(x)}}{1+x^2} \\
\int dC &= \int \frac{\tan^{-1}(x) \cdot e^{\tan^{-1}(x)}}{1+x^2} dx \\
C &= \int \frac{\tan^{-1}(x) \cdot e^{\tan^{-1}(x)}}{1+x^2} dx
\end{aligned}$$

O integral de segundo membro pode ser resolvido usando substituição simples de variável: seja: $u = \tan^{-1}(x) \Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x^2}$ Daí que:

$$C = \int u \cdot e^{u} = \int u d\left(e^{u}\right)$$

Por partes:

$$C = ue^u - \int e^u du = (u-1)\, e^u$$

$$C = \big(\tan^{-1}(x) - 1\big) \cdot e^{\tan^{-1}(x)}$$

E , finalmente pegamos neste C e vamos substituir na equação (3) e temos a nossa solução geral (quarto passo do Algoritmo):

$$y = \big(\tan^{-1} - 1\big)\, e^{\tan^{-1}(x)} \cdot e^{-\tan^{-1}(x)} = \big(\tan^{-1}(x) - 1\big) \cdot e^{\tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(x)} = \big(\tan^{-1}(x) - 1\big) \cdot e^0$$

$$\boxed{\boxed{y = \tan^{-1}(x) - 1}}$$

Olá! Estou aqui para ajudar com qualquer dúvida ou informação de que você precise. Se você tiver alguma pergunta ou precisar de assistência, sinta-se à vontade para entrar em contato comigo no WhatsApp. Estou disponível para conversar e ajudar no que for necessário. Aguardo o seu contato! 879369395