Guião de correcção do exame de Matemática 10 ªclasse 2015 1ª época

1. Assinale com V verdadeiras ou F falsas as afirmações que se seguem :

   (a) $-\dfrac{5}{2} \in [-5, -3]$
   Resposta : F

   Explicação : A fração $-\dfrac{5}{2}$ é equivalente a -2.5 que não pertence ao intervalo $[-5, -3]$.

   (b) $|-5| > -(-5)$
   Resposta : F

   Explicação : O valor $|-5| = 5$ e $-(-5) = 5$. Logo, $5 > 5$ é falso.

   (c) $1^{2015} = 2015$
   Resposta : F

   Explicação : O número 1 elevado a qualquer potência continua sendo 1. Logo $1^{2015} = 1$ e não 2015.

   (d) $\log_2 \frac{1}{4} > \log_2 \frac{1}{8}$
   Resposta : V

   Explicação : Calculando, $\log_2 \frac{1}{4} = -2$ e $\log_2 \frac{1}{8} = -3$. Como $-2 > -3$ a afirmação é verdadeira.

2. Determine o valor numérico das seguintes expressões :

   (a) $\log 200 - \log 20 + \log_2 \frac{1}{2}$
   Usando a propriedade dos logaritmos $\log a - \log b = \log\left(\frac{a}{b}\right)$:

$$\log 200 - \log 20 = \log\left(\frac{200}{20}\right) = \log 10 = 1$$

   E

$$\log_2 \frac{1}{2} = \log_2(2^{-1}) = -1$$

   Logo $\log 200 - \log 20 + \log_2 \frac{1}{2} = 1 - 1 = 0$

(b) $\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}-9$

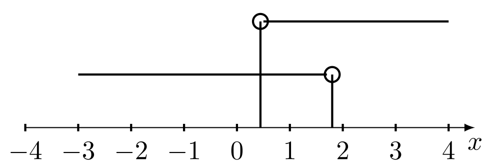
$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}-9\\
&=\sqrt[3]{3^3}+\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{3}-9\\
&=3+3\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}-9\\
\\
&=3+3\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}-9\\
\\
&=3-9+(3\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3})
\end{aligned}$$

$$\boxed{-6+2\sqrt[3]{3}}$$

3. Resolva

(a) $\begin{cases} x+\dfrac{1}{3}>1-\dfrac{x}{2} \\ \\ 2x-5<x-\dfrac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\dfrac{x}{2}>1-\dfrac{1}{3} \\ \\ 2x-x<-\dfrac{1}{2}+5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x+x}{2}>\dfrac{3-1}{3} \\ \\ x<\dfrac{-1+10}{5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x}{2}>\dfrac{2}{3} \\ \\ x<\dfrac{9}{5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3} \\ \\ x<\dfrac{9}{5}\end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x>\dfrac{4}{9} \\ \\ x<\dfrac{9}{5}\end{cases}$



$$\boxed{\frac{4}{9}<x<\frac{9}{5}}$$

(b) $\tan(2x-30)=\sqrt{3}; 0<x<90$

$\tan(2x-30)=\sqrt{3};\ 0<x<90$
Sabendo que $\tan(60°)=\sqrt{3}$. Então :

$$2x-30=60+k\cdot 180 \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Vamos considerar $k=0$ para a solução dentro do intervalo $0<x<90$:

$$2x-30=60 \implies 2x=90 \implies x=45$$

Verificamos se existe outra solução para $k=1$:

$$2x-30=240 \implies 2x=270 \implies x=135$$

$x=135$ não está no intervalo $0<x<90$.
Assim, a única solução é:

$$\boxed{x=45}$$

(c) $x^2 + 1 = \dfrac{2}{x^2}$

Multiplicamos ambos os lados por x^2 (assumindo que $x \neq 0$):

$$x^2(x^2 + 1) = 2$$

$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

Fazendo substituição de $y = x^2$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

Utilizando a fórmula quadrática

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$y = 1 \quad \vee \quad y = -2$$

Como $y = x^2$, descartamos $y = -2$ (não é possível para x^2) então:

$$x^2 = 1 \implies x = \pm 1$$

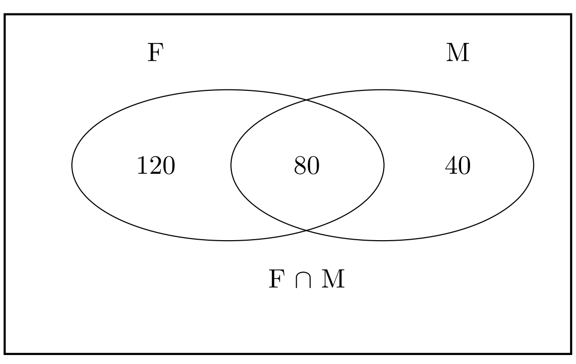
$$\boxed{x = \pm 1}$$

4. A tabela mostra as preferências dos alunos de uma escola em relação às disciplinas de Matemática e Física.

Disciplinas	**Matemática**	**Fisíca**	**Matemática e Física**
Nº de alunos	120	200	80

(a) Represente os dados no diagrama de $Veen$.
Dados :

- U = ? (Total de Alunos)
- F = 200 (Alunos que preferem física)
- M = 120 (Alunos que preferem matemática)
- F ∩ M = 80 (Alunos que preferem ambas disciplinas)
  Representando os dados no diagrama de $Veen$.



(b) Determine o número total de alunos desta escola.
Resposta : U = 240

Explicação : O número total de alunos pode ser dado pela expressão :

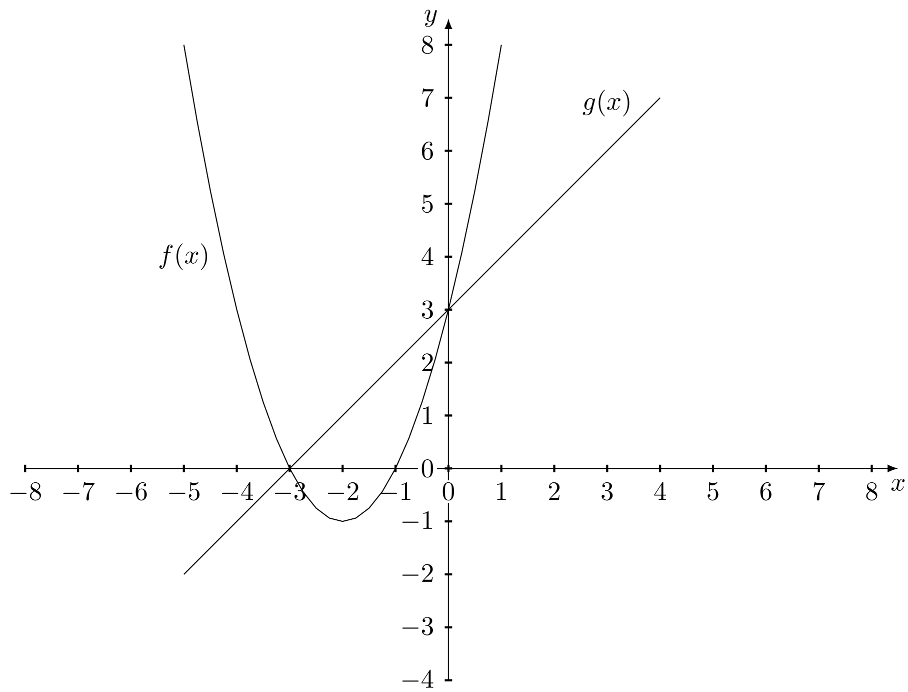
$$U = F + M + F \cap M$$

$$U = 120 + +40 + 80$$

$$\boxed{U = 240}$$

5. Considere as funções $f(x) = x^2 + 4x + 3$ e $g(x) = x + 3$

(a) Represente f e g no mesmo sistema cartesiano
Resposta :



Explicação : Para o esboço das funções podemos considerar
Funcão quadrática $f(x) = x^2 + 4x + 3$ **:**

- Zeros da função $(f(x) = 0)$: $x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \vee x = -1$
- Concavidade da parábola : Como $a = 1$, ou seja $a > 0$ (positivo) a concavidade é voltada para cima.
- Ordenada na origem $(x = 0)$: $y = 0^2 + 4 \cdot 0 + 3 \Rightarrow y = 3$

Função linear $g(x) = x + 3$ **:**

- Zero da função $(f(x) = 0)$: $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$
- Declíve da recta : $m = 1$ ou seja $m > 0$ (positivo) a função é crenscente.
- Coeficiente linear : $b = 3$

(b) A partir da figura resolva $f(x) = g(x)$.
Resposta : $f(x) = g(x) : x = -3 \wedge x = -1$

Explicação : $f(x) = g(x)$ é mesmo que perguntar para quais valores de x as duas funções se interceptam. Então, a partir do gráfico podemos observar que a interceção é no ponto $x = -3$ e no ponto $x = 0$. Então, as funções são iguais nesses dois pontos, ou seja $f(x) = g(x) : x = -3 \wedge x = -1$

(c) Qual é o contradomínio de $f(x)$.
Resposta : y$\in [-1;+\infty[$
Quais são os valores que a ordenada (y) toma ou quais valores ele assume em relação ao eixo y. À partir do gráfico podemos ver que o y assume valores à partir de -1 até ao mais infinito.

$$\boxed{CD_f : y \in [-1;+\infty[}$$

(d) Para que valores de x, $g(x) < f(x)$.
Resposta : $x \in]-\infty, -3[\cup]0;+\infty[$

Explicção : $g(x) < f(x)$ significa para quais valores de x a função $f(x)$ é menor que $g(x)$

6. As notas do João em cinco testes de Matemática foram as seguintes : 15, 16, 13, 15, 11.

(a) Qual é a moda das notas?
Resposta : A moda das notas é 15.

Explicação : A moda é a elemento que aparece mais vezes. Caso não haja elemento que apareça mais vezes, a distribuição é chamada de amodal. No nosso caso o número **15** aparece mais vezes no caso duas vezes, então é a nossa moda.

(b) Calcule a média aritmética das notas.
Resposta : $\bar{x} = 14$

Explicação : A média aritmética é dada pela fórrmula :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

Substituindo os valores temos :

$$\bar{x} = \frac{15 + 16 + 13 + 15 + 11}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{70}{5} = 14$$

(c) Qual deve ser a nota do sexto teste para que a média suba em 1 valor?
Resposta : A nota do sexto teste deve ser de 20.

Explicação : Consideremos y o nosso sexto teste e a média acima calculada. Mas a nova média será acrescida um valor, então a média sera dada pela expressão :

$$\bar{x} + 1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + x_{n+1}}{n+1}$$

$$\bar{x} + 1 = \frac{15 + 16 + 13 + 15 + 11 + y}{5+1}$$

$$14 + 1 = \frac{70 + y}{6}$$

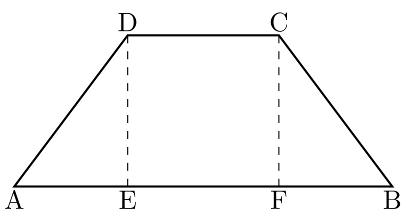
$$15 \times 6 = 70 + y$$

$$90 = 70 + y$$

$$90 - 70 = y$$

$$\boxed{y = 20}$$

7. Dado o trapézio isósceles $[ABCD]$, com $\overline{AB} = 10cm$ e $\overline{DC} = \overline{DE} = 4cm$ Determine :



(a) a medida de $\overline{AD}$. **Resposta :** $|AD| = 5cm$

Explicação : Para encontrar a medida do segmento AD podemos aplicar o teorema de pitágoras no triângla ADE sendo AD a hipotenusa, mas primeiramente temos de achar o lado(cateto) AE. Sabendo que $|AB| = |AE| + |EF| + |FB|$ e também $|AB| = 10, |DC| = |EF|, |AE| = |FB|$, substituido teremos

$$10 = |AE| + 4 + |AE|$$
$$10 - 4 = |AE| + |AE|$$
$$6 = 2|AE|$$
$$\frac{6}{2} = |AE|$$
$$3 = |AE|$$

Aplicando o teorema sobre o triângulo ADE teremos :

$$|AD|^2 = |AE|^2 + |DE|^2$$

Substituindo os valores :

$$|AD|^2 = 3^2 + 4^2$$
$$|AD|^2 = 9 + 16$$
$$|AD| = \sqrt{25} = 5cm$$

(b) o perímetro do trapézio.
Resposta : $P = 24cm$
Explicação : O perímetro é a medida do contorno de uma figura geométrica ou seja é a soma dos comprimentos de todos os lados da figura. Então para o calcular o perímetro do trápezio tomaremos a fórmula :

$$P = |AB| + |DC| + |AD| + |CB|$$

Substituindo os valores teremos, e tomando em conta que os lados não paralelos são iguais :

$$P = 10cm + 4cm + 5cm + 5cm$$
$$\boxed{P = 24cm}$$