Contextualização: neste documento traz-se a proposta de correcção do primeiro mini-teste de Analise Matemática III do ISUTC, realizado aos 15/08/2024. Estou aqui para ajudar com qualquer dúvida ou informação de que você precise. Se você tiver alguma pergunta ou precisar de assistência, sinta-se à vontade para entrar em contato comigo no WhatsApp. Estou disponível para conversar e ajudar no que for necessário. Aguardo o seu contato! **879369395**

1. Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+3^n-2^n}{6}$

   Solução:
   Vamos reescrever a série como soma de séries geométricas, separando a fracção. Lembrando da serie geométrica que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}$ com $|q|<1$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+3^n-2^n}{6^n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{6^n}+\frac{3^n}{6^n}-\frac{2^n}{6^n}\right)\\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{6}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{6}\right)^n\\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\\
&= 2\cdot\frac{1/6}{1-1/6}+\frac{1/2}{1-1/2}-\frac{1/3}{1-1/3}\\
&= 2\cdot\frac{1/6}{5/6}+\frac{1/2}{1/2}-\frac{1/3}{2/3}\\
&= \frac{2}{5}+1-\frac{1}{2}\\
&= \frac{4+10-5}{10}\\
&= \frac{9}{10}
\end{aligned}
$$

2. Verifique se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{n+n^2\ln(n)}$ é absolutamente convergente ou condicionalmente

convergente.

Solução:
Primeiro vamos começar por verificar a convergência a absoluta. Seja $a_n = \dfrac{(-1)^n(n+1)}{n+n^2\ln(n)}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| &= \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n(n+1)}{n+n^2\ln(n)}\right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+n^2\ln(n)} \\
&\sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+n\ln(n))} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n\ln(n)} \\
&\sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Agora vejamos que pelo critério integral $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)} \sim \int_1^{\infty}\frac{1}{x\ln(x)}dx$
Resolvendo o integral podemos ter o seguinte

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty}\frac{1}{x\ln(x)}dx &= \int_1^{\infty}\frac{d(\ln(x))}{\ln(x)} \\
&= [\ln(\ln(x))]_1^{\infty} \\
&= \infty - (-\infty) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Logo pelo critério integral a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$ diverge. Como a série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n\ln(n)} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n+n^2\ln(n)} = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

Então a série$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ dos módulos também diverge.

E por fim, vamos verificar a convergência condicional.

Seja $b_n = \dfrac{n+1}{n+n^2\ln(n)}$

(i) $\displaystyle\lim_{n\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+n^2\ln(n)} = 0$

(ii) $b_{n+1} - b_n < 0 \Rightarrow b_n$ é decrescente

Logo pelo critério de Leibniz a série converge.

Como a série dos módulos diverge é a série converge pelo critério de Leibniz, então a série é condicionalmente convergente.

3. Determine o centro, raio e intervalo de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Solução: Seja $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$, então

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+2}(x-2)^{n+1}}{(n+2)\ln(n+2)}}{\frac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{(x-2)^n}(x-2)}{(n+2)\ln(n+2)}\cdot\frac{(n+1)\ln(n+1)}{\cancel{(x-2)^n}}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ln(n+1)}{(n+2)\ln(n+2)}\cdot|x-2| \\
&= |x-2| < 1
\end{aligned} \tag{2}$$

Resolvendo a inequação $|x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Leftrightarrow 1 < x < 3$, sabemos que $-R < x - c < +R$, onde c é o centro e R o raio de convergência. Então o centro de convergência é $c = 2$ e o raio é $R = 1$.

Agora testamos a série nos extremos de $1 < x < 3$.

Para $x = 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(1-2)^n}{(n+2)\ln(n+1)} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

Evidentemente que $-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} \sim -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$ e vimos do número 2 que $-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$ diverge pelo critério integral então $-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ também diverge.

Para $x = 3 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(3-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}$, vamos verificar sua convergência absoluta e condicional.

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$$

Vimos anteriormente que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ diverge, então a série dos módulos diverge.

Agora vamos verificar a convergente condicional. Seja $b_n = \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$

(i) $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = 0$

(ii) $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1} < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow b_n$ é decrescente.

Pelo que, para $x = 3$ a série é condicionalmente convergente. Então podemos ter como intervalo de convergência: $I = 1 < x \leq 3 = (1, 3]$