FichaIII- AMIII

Tema: Gradiente e derivada direcional; Derivada direcional; Diferencial total de uma função; Equação do plano tangente

1 Derivada direcional

Teorema 1.1. *Se f é uma função diferenciável em x e y, então f tem derivada direcional na direcção e sentido de qualquer versor $u = \langle a, b\rangle$ e*

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y) \cdot a + f_y(x, y) \cdot b$$

Nota: se o versor **u** forma um ângulo θ com o eixo x positivo, então pode-se escrever $u = \langle\cos(\theta), \sin(\theta)\rangle$, pelo que a fórmula do **Teorema 1.1** pode ser escrita como

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y) \cdot \cos(\theta) + f_y(x, y) \cdot \sin(\theta)$$

1. Determine a derivada da função $z = x^2 + y^2$ no ponto $M(2, 3)$ segundo a orientação do vector $\vec{l}$ faz $60°$ com o eixo Ox.

   Solução:
   Queremos $D_{\vec{l}} f(2, 3)$, encontremos inicialmente as derivadas parciais de primeira ordem da função $z = x^2 + y^2$:

   $$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$$

   Agora Encontremos essas derivadas exactamente no ponto $M(2, 3)$

   $$f_x(2, 3) = 2 \cdot 2 = 4 \quad \text{e} \quad f_y(2, 3) = 2 \cdot 3 = 6$$

   Daí que

   $$\begin{aligned} D_{\vec{l}} f(2, 3) &= f_x(2, 3)\cos(60°) + f_y(2, 3)\sin(60°) \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 2 + 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

2. Determine a derivada da função $z = x^2 - y^2$ no ponto $M(2, -1)$ segundo a orientação do vector $\vec{l}$ faz $30°$ com o eixo Ox.

   Solução: fica ao cargo do leitor.

3. Determine a derivada da função $z = x^2 + xy - y^2$ no ponto $M(-2, 3)$ segundo a orientação do vector $\vec{l}$ faz $30°$ com o eixo Oy.

   Solução:
   Seguindo o mesmo raciocínio da solução 1, teremos as derivadas parciais:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = x - 2y$$

   Essas derivadas no ponto $M(-2, 3)$ serão

$$f_x(-2, 3) = 2 \cdot (-2) + 3 = -4 + 3 = -1 \quad \text{e} \quad f_y(-2, 3) = -2 - 2 \cdot 3 = -2 - 6 = -8$$

   agora o ângulo θ não será de $30°$, pois este é o ângulo que $\vec{l}$ forma com o eixo Oy, mas pelo **Teorema 1.1** precisamos do ângulo que $\vec{l}$ forma com o eixo Ox, note-se que, se $\vec{l}$ forma ângulo de $30°$ com eixo Oy, automaticamente forma ângulo de $60°$ com o eixo Ox. Então $\theta = 60°$, pelo que

$$\begin{aligned} D_{\vec{l}}f(-2, 3) &= f_x(-2, 3)\cos(60°) + f_y(-2, 3)\sin(60°) \\ &= -1 \cdot \frac{1}{2} + (-8) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\left(1 + 8\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

4. Determine a derivada da função $z = x^2 - y^2$ no ponto $M(2, -1)$ segundo a orientação do vector $\vec{l}$ faz $30°$ com o eixo Ox.

   Solução: fica ao cargo do leitor.

5. Encontre a derivada da função $z = x^2 + y^2$ no ponto $M(1, 2)$, na direcção indicada pelo vector $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.

   Solução:
   As derivadas da função $z = x^2 + y^2$ foram feitas no exercício 1, agora vamos simplesmente substituir no novo ponto M dado

$$f_x(1, 2) = 2 \cdot 1 = 2 \quad \text{e} \quad f_y(1, 2) = 2 \cdot 2 = 4$$

   Vejamos que $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 1$, o que significa que $\vec{v}$ não é unitário, e pelo **Teorema 1.1** o vector director precisa ser unitário, assim sendo vamos achar um vector u com mesma direcção e sentido de $\vec{v}$ que seja unitário, tal vector vamos chamar de versor de $\vec{v}$. Então, o versor de $\vec{v}$ é $u = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{5}(3, 4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Pelo que

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}}f(1,2) &= D_u f(1,2) \\ &= f_x(1,2)\cdot\frac{3}{5} + f_y(1,2)\cdot\frac{4}{5} \\ &= 2\cdot\frac{3}{5} + 4\cdot\frac{4}{5} \\ &= \frac{22}{5} \end{aligned}$$

6. Encontre a derivada da função $z = x^3y^2$, no ponto $A(2,2)$, na direcção indicada pelo vector $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

   Solução: Fica ao cargo do leitor.

2 Vector Gradiente

Definição 2.1. *Se f é uma função de duas variáveis x e y, o **gradiente** de f é uma função vectorial ∇f definida por*

$$\nabla f(x,y) = \langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

7. Achar e construir o gradiente da função $z = x^2y$ no ponto $P(1,1)$.

   Solução:
   Achando as derivadas parciais

$$f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \text{e} \quad f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

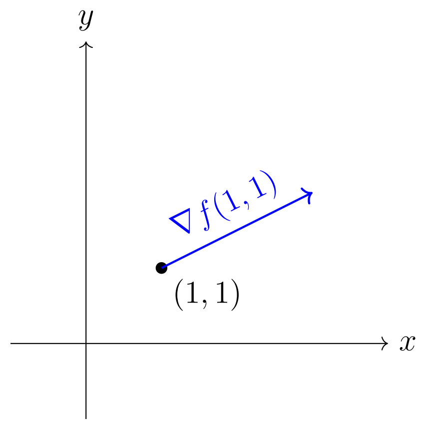
Substituindo o ponto $P(1,1)$

$$f_x(1,1) = 2\cdot 1\cdot 1 = 2 \quad \text{e} \quad f_y(1,1) = 1^2 = 1$$

Pelo que

$$\begin{aligned} \nabla f(1,1) &= f_x(1,1)\vec{i} + f_y(x,y)\vec{j} \qquad (1) \\ &= 2\vec{i} + \vec{j} \qquad (2) \end{aligned}$$

Construção do vector:



8. Achar e construir o gradiente da função $z = x^2y + y^2$ no ponto $P(2, 3)$.

   Solução: Fica ao cargo do leitor.

9. Calcule aproximadamente $\sqrt{1,02^2 + 3,01^2}$.

   Solução:
   Suponhamos que tenhamos $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, por outro lado sabemos que

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y \qquad (3)$$

   Note-se que $x_0 + \Delta x = 1,02$ e $y_0 + \Delta y = 3,01$, o número 1,02 está entre dois números inteiro 1 e 2, e nesse caso o x_0 será o inteiro mais próximo de $1,02$ logo $x_0 = 1$, daí que Δx será o que falta para $1,02$, afinal $x_0 + \Delta x = 1,02$, logo $\Delta x = 0,02$. A mesma ideia serve para encontrar o $x_0 = 3$ e o $\Delta y = 0,01$. Agora Encontremos as derivadas parciais no ponto $(x_0, y_0) = (1, 3)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(1, 3) = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(1, 3) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

   E pela Equação (3), podemos ter o seguinte:

$$\begin{aligned}
f(1.02, 3.01) &= \sqrt{1.02^2 + 3.01^2} \\
&\approx f(1, 3) + \frac{\partial z}{\partial x}(1, 3) \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(1, 3) \cdot \Delta y \\
&= \sqrt{1^2 + 3^2} + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot 0,02 + \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot 0,01 \\
&= \sqrt{10} + 0,32 \cdot 0,02 + 0,95 \cdot 0,01 \\
&= 3,16 + 0,0064 + 0,0095 \\
&= 3,1759
\end{aligned}$$

10. Calcule aproximadamente $\sqrt{(4.02)^2 + (3.01)^2}$.

    Solução: Fica ao cargo do leitor.

11. Calcule aproximadamente $\ln(0,09^2 + 0,99^2)$.

Solução:
Seja $f(x,y) = ln(x^2 + y^2)$, usaremos a ideia da questão 10, $x_0 + \Delta x = 0,09$ e $y_0 + \Delta y = 0,99$. Agora claramente que $0,09$ está dois números inteiros respectivamente 0 e 1, mas logicamente está mais próximo de 0, então $x_0 = 0$ o que implica que $\Delta x = 0,09 - x_0 = 0,09 - 0 = 0,09$, assim como $0,99$ está entre 0 e 1, mas, mais proximo de 1, logo $x_0 = 1$ pelo que, $\Delta y = 0,99 - y_0 = 0,99 - 1 = -0,01$. Agora precisamos achar as derivadas parciais no ponto $(x_0, y_0) = (0,1)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = \frac{2\cdot 0}{0^2+1^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = \frac{2\cdot 1}{0^2+1^2} = 2$$

Daí que pela Equação (3) podemos ter que

$$\begin{aligned} f(0.09, 0.99) &= \ln(0.09^2 + 0.99^2) \\ &\approx \ln(0^2 + 1^2) + \frac{\partial z}{\partial x}(0,1)\cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(0,1)\cdot \Delta y \\ &= \ln(1) + 0\cdot 0,09 + 2\cdot(-0,01) \\ &= 0 + 0 - 0,02 \\ &= -0,02 \end{aligned}$$

12. Dada a função $z = x^2 + y^2$, onde $x = \xi + \eta$ e $y = \xi - \eta$, determine $\dfrac{\partial z}{\partial \xi}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial \eta}$.

Solução:

(i) $\dfrac{\partial z}{\partial \xi} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \xi} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \xi}$

Onde $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} = 2x = 2(\xi+\eta)$ e $\dfrac{\partial x}{\partial \xi} = \dfrac{\partial(\xi+\eta)}{\partial \xi} = 1$ por outro lado $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y} = 2y = 2(\xi-\eta)$ e $\dfrac{\partial y}{\partial \xi} = \dfrac{\partial(\xi-\eta)}{\partial \xi} = 1$ Substituindo vamos ter que

$\dfrac{\partial z}{\partial \xi} = 2(\xi+\eta)\cdot 1 + 2(\xi-\eta)\cdot 1 = 2(\xi+\eta+\xi-\eta) = 4\xi$

(ii) $\dfrac{\partial z}{\partial \eta} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial \eta} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial \eta}$

Onde $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} = 2x = 2(\xi+\eta)$ e $\dfrac{\partial x}{\partial \eta} = \dfrac{\partial(\xi+\eta)}{\partial \eta} = 1$, por outro lado

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial y}{\partial \eta} = \dfrac{\partial(\xi-\eta)}{\partial \eta} = -1$, Substituindo vamos ter que

$\dfrac{\partial z}{\partial \eta} = 2(\xi+\eta)\cdot 1 + 2(\xi-\eta)\cdot(-1) = 2(\xi+\eta-\xi+\eta) = 4\eta$

13. Determine a derivada parcial $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ da função $z = \ln(x^2+y^2)$ onde $x = uv$ e $y = \dfrac{u}{v}$.

Solução: Fica ao cargo do leitor.

14. Determine a derivada da função $z = x^2 - xy + y^2$ no ponto $M(1,1)$ segundo a orientação $\vec{l} = (6,8)$.

    Solução: Fica ao cargo do leitor.

15. Determine o módulo e a orientação do gradiente da função $z = xy$ no ponto $M(2,1)$.

    Solução:
    Vimos anteriormente que $\nabla f(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$, onde

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 2$$

    Logo o vector gradiente é $\nabla f(2,1) = \vec{i} + 2\vec{j}$ e o seu módulo será dado por

$$\boxed{|\nabla f(2,1)| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}}$$

3 Equação do plano tangente

FichaIV

Tema: Extremos de funções de várias variáveis, Extremos Absolutos e Condicionais

4 Teste de segunda derivada

Suponha-se que as segundas derivadas de f sejam Contínuas em uma bola aberta com centro em (x_0, y_0), e suponha-se que $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0)$. Seja

$$D = D(x_0, y_0) = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$$

a) Se $D > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, então $f(x_0, y_0)$ é um mínimo local;

b) Se $D > 0$ e $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, então $f(x_0, y_0)$ é um máximo local;

c) Se $D < 0$, então $f(x_0, y_0)$ não é um mínimo local e nem máximo local.

1. Investigue se tem extremos, as funções de duas variáveis seguintes:

   a) $z = (x-1)^2 + 2y^2$
   Solução:
   Inicialmente vamos localizar as derivadas parciais

   $$z_x = 2(x-1), \quad z_y = 2y$$

   Igualando a zero as derivadas parciais

   $$2(x-1) = 0 \quad \text{e} \quad 2y = 0$$

   Obtemos $x = 1$ e $y = 0$, então podemos ter o ponto $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

   Agora Encontremos as derivadas parciais de segunda ordem e $D(x, y)$

   $$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = 0 \quad \text{e} \quad f_{yy} = 2$$

   $$D(x, y) = 2 \cdot 2 - 0^2 = 4$$

   Como $D(1, 0) = 4 > 0$ e $f_{xx}(1, 0) = 2 > 0$, então o ponto $f(1, 0) = (1-1)^2 + 2 \cdot 0^2 = 0$ é um mínimo local.

   b) $z = 4 - x^2 - y^2$
   Solução: Fica ao cargo do leitor.

c) $z = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9$
Solução: Fica ao cargo do leitor.

d) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$
Solução:
Seguindo mesmo processo podemos ter que

$$z_x = 2x + y - 2, \quad z_y = x + 2y - 1$$

Resolvendo $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow Sol : \{(1, 0)\}.$
Agora Encontrando as derivadas parciais de segunda ordem e o $D(x, y)$

$$z_{xx} = 2, \quad z_{xy} = 1 \quad \text{e} \quad z_{yy} = 2$$

$$D(x, y) = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3$$

Como $D(1, 0) = 3 > 0$ e $f_{xx}(1, 0) = 2 > 0$, então $f(1, 0) = 1^2 + 1 \cdot 0 + 0^2 - 2 \cdot 1 - 0 = 1 - 2 = -1$ é um mínimo local.

Olá! Estou aqui para ajudar com qualquer dúvida ou informação de que você precise. Se você tiver alguma pergunta ou precisar de assistência, sinta-se à vontade para entrar em contato comigo no WhatsApp. Estou disponível para conversar e ajudar no que for necessário. Aguardo o seu contato! 879369395