FILOSCHOOL

Guião de correcção do exame de Matemática 12ª classe 2021–Primeira Época

1. Qual é a expressão que apresenta uma proposição?

   A $x+1=4$
   B $\sqrt{x} \neq 4$
   C $x>4$
   D $3+4=7$

   Resposta: D $3+4=7$
   Explicação: Uma proposição é uma frase declarativa (ou expressão) que pode ser classificada como verdadeira ou falsa, mas nunca ambas ao mesmo tempo.

2. Considere as proposições, p: "Nove é múltiplo de quatro" e q: "Doze não é um número primo". Qual é a tradução para a linguagem simbólica da proposição, "Doze não é um número primo e nove não é múltiplo de quatro"?

   A $\sim q \vee p$
   B $q \vee \sim p$
   C $p \vee q$
   D $\sim q \Rightarrow p$

   Resposta: NENHUMA ALTERNATIVA CORRECTA
   Explicação: A frase "Doze não é um número primo e nove não é múltiplo de quatro" pode ser escrito
   i. q: "Doze não é um número primo" (mantém-se como está, sem negação)
   ii. ~p: "Nove não é múltiplo de quatro" (negação de p)
   iii. A conjunção (ligação por "e") de q e ~ p é:
   $$p \wedge \sim q$$

3. Qual é a negação proposição $\sim(\sim p \Rightarrow q)$?

   A $\sim p \wedge \sim q$
   B $p \vee q$
   C $p \Rightarrow \sim q$
   D $p \wedge \sim q$

   Resposta: A $\sim p \wedge \sim q$
   Explicação: Uso do conceito de implicação, lei de morgan e simplifição.

4. Qual é a proposição equivalente a $\sim(p \vee \sim q)$?

   A $\sim p \vee \sim q$
   B $\sim p \wedge q$
   C $p \wedge \sim q$
   D $\sim p \vee p$

   Resposta: B $\sim p \wedge q$
   Explicação: Para determinar a proposição equivalente a $\sim(p \vee \sim q)$, utilizamos as leis de De Morgan e simplificamos:
   $$\sim(p \vee \sim q) \equiv \sim p \wedge \sim(\sim q) \quad \text{Lei de Morgan}$$
   $$\equiv \sim p \wedge q$$

5. Qual é a negação de $x^2 > 1$?

A $x^2 \neq 1$

B $x^2 \leq 1$

C $x^2 = 1$

D $x^2 \geq 1$

Resposta: B $x^2 \leq 1$
Explicação: A negação de uma proposição do tipo $P > Q$ é $P \leq Q$, pois:

i. O oposto de "maior que >" é "menor ou igual a ≤".

ii. Assim, para $x^2 > 1$, a negação é :

$$\boxed{x^2 \leq 1}$$

6. Em símbolos, como é que se escreve: "A soma de quaisquer dois números racionais é sempre um número positivo"?

A $\exists_{x,y} \in \mathbb{Q} : x + y > 0$

B $\forall_{x,y} \in \mathbb{Q} : x + y > 0$

C $\exists_{x,y} \in \mathbb{Q} : x + y \geq 0$

D $\forall_{x,y} \in \mathbb{Q} : x + y \geq 0$

Resposta: B $\forall a, b \in \mathbb{Q}, a + b > 0$
Exolicação: A afirmação "A soma de quaisquer dois números racionais é sempre um número positivo" pode ser representada simbolicamente da seguinte forma:

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}, a + b > 0$$

Explicação dos símbolos:

- $\forall$: Significa "para todo" ou "para quaisquer".
- $a, b \in \mathbb{Q}$: Indica que a e b pertencem ao conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$).
- $a + b > 0$: Representa a condição de que a soma de a e b é positiva.

7. Qual é dessas uma expressão algébrica?

A $3^2 - 5^2$

B $\sqrt{5} - \sqrt{5}$

C $\dfrac{3xy}{(a-3)^2}$

D $\dfrac{4}{5} - \dfrac{2}{7} + 4$

Resposta: C $\dfrac{3xy}{(a-3)^2}$
Explicação: Uma expressão algébrica é composta por números, variáveis (como x,y,a) e operações matemáticas (soma, subtração, multiplicação, divisão, potências, raízes), sem a necessidade de igualdade ou desigualdade.

8. Qual é a expressão algébrica irracional?

A $\dfrac{x^2 - 3x}{x - 1}$

B $\dfrac{\sqrt[3]{7}}{x - 3}$

C $\dfrac{(x-1)^2 + \sqrt{x}}{x}$

D $\dfrac{1}{x^2 + \sqrt{2}}$

Resposta: C $\dfrac{(x-1)^2 + \sqrt{x}}{x}$
Explicação: Para identificar a expressão algébrica irracional, é importante observar que:

i. Uma expressão algébrica pode conter números, variáveis e operações matemáticas, incluindo raízes.
ii. Uma expressão irracional contém raízes que envolvem variáveis ou números não inteiros que não podem ser simplificados para um número racional.

9. Qual é a dominio de existência da expressão $\dfrac{1}{3x-9}$?

A $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

B $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

C $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

D $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

Resposta: D $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ **Explicação:** Para determinar o **domínio de existência** da expressão $\frac{1}{3x-9}$, precisamos garantir que o denominador nunca seja igual a zero pois a divisão por zero não é definida.

(a) O denominador é $3x-9$ Resolvemos:

$$3x-9=0 \implies 3x=9 \implies x=3.$$

(b) Portanto, $x=3$ é o valor que torna o denominador zero. Devemos excluí-lo do domínio.

(c) O domínio é o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) **exceto** $x=3$.

10. O conjunto solução da equação $x^4-5x^2+4=0$ é...

A $x=\{-2,-1,1,2\}$

B $x=\{-4,-1,1,4\}$

C $x=\{-2,-1,0,1\}$

D $x=\{-2,-1,0,2\}$

Resposta: A $x=\{-2,-1,1,2\}$
Explicação: Para resolver a equação $x^4-5x^2+4=0$, podemos usar a substituição $y=x^2$. Isso transforma a equação em uma forma quadrática:

$$y^2-5y+4=0.$$

i. Resolver a equação quadrática A equação $y^2-5y+4=0$ é resolvida utilizando soma e produto:

$$y^2-5y+4=(y-1)(y-4)=0.$$

As raízes são:

$$y=1 \quad \text{e} \quad y=4.$$

ii. Voltar para x Lembre-se de que $y=x^2$. Assim: - Para $y=1$:

$$x^2=1 \implies x=\pm 1.$$

- Para $y=4$:

$$x^2=4 \implies x=\pm 2.$$

11. Qual é solução da inequação $\frac{x-1}{x+1}\geq 0$

A $]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[$

B $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

C $]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[$

D $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

Resposta: A $]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[$

12. De um sistema linear de 2 equações e 2 incógnitas (x,y), sabe-se que $\Delta=-2$, $\Delta x=-4$ e $\Delta y=-6$. Qual é o valor de $-x+y+4$?

A -2

B -1

C 0

D 1

Resposta: B -1
Explicação: Para resolver o problema, utilizamos a regra de Cramer que nos fornece as fórmulas para x e y em um sistema linear com determinantes:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Dados: - $\Delta = -2$
- $\Delta_x = -4$
- $\Delta_y = -6$

Calcular x e y substituímos os valores fornecidos:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Substituímos $x = 2$ e $y = 3$ na expressão:

$$-x - y + 4 = -(2) - 3 + 4 = -2 - 3 + 4 = -1.$$

13. A solução do sistema $\begin{cases} -x - 4y = 0 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ é o par ordenado...

A $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$

C $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$

B $\left(2, \frac{1}{2}\right)$

D $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$

Resposta: C $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$
Explicação: Para resolver o sistema

$$\begin{cases} -x - 4y = 0 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$$

Utilizamos substituição ou adição.
Isolamos x na primeira equação da equação $-x - 4y = 0$, temos:

$$x = -4y$$

Substituímos $x = -4y$ na segunda equação Substituímos $x = -4y$ em $3x + 2y = 5$:

$$3(-4y) + 2y = 5 \implies -12y + 2y = 5 \implies -10y = 5$$

Resolvendo:

$$y = -\frac{1}{2}$$

Calculamos x usamos $x = -4y$ com $y = -\frac{1}{2}$:

$$x = -4\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$$

O par ordenado é:

$$(x, y) = \left(2, -\frac{1}{2}\right).$$

14. Sendo $a, b \in \mathbb{R}$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, qual das propriedades é correcta?

A $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} + b^{\frac{p}{q}}$

C $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$

B $(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} + b^{\frac{p}{q}}$

D $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$

Resposta: D $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$
Explicação:

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{r}{s}}$$

Esta afirmação está correta, pois é a propriedade de multiplicação de potências com a mesma base:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

15. O conjunto solução da equação $2^{2x} - 2^{x+1} + 1 = 0$

A $x = 3$

B $x = 2$

C $x = 1$

D $x = 0$

Resposta: D $x = 0$
Explicação: A equação fornecida é:

$$2^{2x} - 2^{x+1} + 1 = 0.$$

Substituímos $2^x = y$, sabemos que $2^{2x} = (2^x)^2 = y^2$. Assim a equação se torna:

$$y^2 - 2 \cdot y + 1 = 0.$$

A equação pode ser reescrita como:

$$(y-1)^2 = 0$$

Isso implica que:

$$y - 1 = 0 \implies y = 1$$

Lembrando que $y = 2^x$, temos:

$$2^x = 1$$
$$2^x = 2^0$$

$$x = 0$$

16. Qual é a correta tradução simbólica da afirmação: "Conjunto de valores de x que se encontram a d unidade da origem 0"?

A $||x| + d|$

B $||x| - d|$

C $|x| = -d$

D $|x| = d$

Resposta: D $|x| = d$
A afirmação "Conjunto de valores de x que se encontram a d unidade da origem 0" refere-se à definição de valor absoluto.

Sabemos que:

$$|x| = d$$

significa que a distância de x à origem 0 é exatamente d.

Portanto, a tradução correta é:

$$\boxed{|x| = d}$$

17. Qual é a condição para que $|-x+1| = -x+1$?

A $x > 1$

B $x \geq 1$

C $x < 1$

D $x \leq -1$

Resposta: NENHMA DAS ALTERNATIVAS
Explicação: Lembrando da definição de valor absoluto:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0, \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

No caso dado, temos:

$$|-x+1| = -x+1 \implies -x+1 \geq 0$$

Resolvemos a desigualdade:

$$-x+1 \geq 0 \implies -x \geq -1 \implies x \leq 1$$

Portanto, a condição para que $|-x+1| = -x+1$ é:

$$\boxed{x \leq 1}$$

18. A solução da equação é $|x-4| = 3x-2$ é...

A $-\frac{3}{2}$

B -1

C 1

D $\frac{3}{2}$

Resposta: D $\frac{3}{2}$
Explicação: Definição de valor absoluto A equação $|x-4| = 3x-2$ significa que existem duas condições: i. $x-4 = 3x-2$ ii. $-(x-4) = 3x-2$

Caso 1: $x-4 = 3x-2$
Resolvendo:

$$x-4 = 3x-2 \implies -4+2 = 3x-x \implies -2 = 2x \implies x = -1$$

Caso 2: $-(x-4) = 3x-2$
Resolvendo:

$$-(x-4) = 3x-2 \implies -x+4 = 3x-2 \implies 4+2 = 3x+x \implies 6 = 4x \implies x = \frac{3}{2}$$

Verificação das soluções 1. Para $x = -1$:

$$|x-4| = |(-1)-4| = 5, \quad 3x-2 = 3(-1)-2 = -5 \quad \text{(não satisfaz)}$$

2. Para $x = \frac{3}{2}$:

$$|x-4| = \left|\frac{3}{2}-4\right| = \left|-\frac{5}{2}\right| = \frac{5}{2}, \quad 3x-2 = 3\left(\frac{3}{2}\right)-2 = \frac{5}{2} \quad \text{(satisfaz)}$$

$$\boxed{x = \frac{3}{2}}$$

19. Quantas palavras, com ou sem sentido, podem-se formar com a palavra GENTIL, começando por uma vogal?

A 24

B 36

C 48

D 60

Resposta: NENHUMA DAS ALTERNATIVAS
Explicação: A palavra **GENTIL** possui 6 letras distintas: G, E, N, T, I, L. As vogais presentes são E e I, ou seja, temos 2 vogais.

i. Escolher a vogal inicial
A palavra deve começar com uma vogal (E ou I). Portanto, temos 2 opções para a primeira letra.

ii. Arranjar as outras 5 letras
Após escolher a vogal inicial, restam 5 letras diferentes (entre as consoantes e a outra vogal) para serem arranjadas nas demais 5 posições. O número de formas de ordenar essas 5 letras é dado por:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

iii. Total de palavras
Para cada escolha da vogal inicial (E ou I), existem $5! = 120$ arranjos das outras letras. Como há 2 escolhas para a vogal inicial, o total de palavras possíveis é:

$$2 \cdot 120 = 240$$

O número total de palavras, com ou sem sentido, que podem ser formadas a partir da palavra **GENTIL**, começando por uma vogal, é 240.

20. Determine $n \in \mathbb{N}$, de modo que $C_2^{n+2} = 10$.

A 2

B 3

C 4

D 5

Resposta: B 3
Explicação: Fórmula do coeficiente binomial

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Substituímos $k = 2$ e $n = n+2$:

$$C_2^{n+2} = \frac{(n+2)!}{2!(n+2-2)!} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} = 10 \implies (n+2)(n+1) = 20$$

$$n^2 + 3n + 2 = 20 \implies n^2 + 3n - 18 = 0$$

$$n^2 + 3n - 18 = (n+6)(n-3) = 0 \implies n = -6 \quad \text{(não é natural)} \quad \text{ou} \quad n = 3.$$

$$\boxed{n = 3}$$

21. Qual é a expressão equivalente $\frac{n! + (n+1)!}{(n+2)!}$?

    A $\frac{n}{n+1}$

    B $\frac{1}{n-1}$

    C $\frac{1}{n+1}$

    D $\frac{n}{n-1}$

Resposta: C $\frac{1}{n+1}$

Dada a expressão:

$$\frac{n! + (n+1)!}{(n+2)!}$$

$$= \frac{n! + (n+1)n!}{(n+2)(n+1)n!}$$

$$= \frac{\cancel{n!}(1 + (n+1))}{(n+2)(n+1)\cancel{n!}}$$

$$= \frac{(1 + n + 1)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{\cancel{(n+2)}}{\cancel{(n+2)}(n+1)}$$

$$\boxed{\frac{1}{n+1}}$$

22. O contrário de um acontecimento certo, é um acontecimento …

    A Composto

    B Elementar

    C Impossível

    D Incompatível

Resposta: C Impossível
Explicação: O contrário de um acontecimento certo (probabilidade $P = 1$) é um acontecimento impossível (probabilidade $P = 0$).

23. Qual é a probabilidade de aparecer só "coroa", lançando duas vezes uma moeda?

A $\frac{1}{4}$

C $\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{3}$

D $\frac{1}{8}$

Resposta: A $\frac{1}{4}$
Explicação: Lançando uma moeda, há duas possibilidades: "cara" (C) ou "coroa" (K). Para dois lançamentos, as combinações são:

$$\{CC, CK, KC, KK\}.$$

Apenas uma combinação é "coroa" duas vezes (KK)

Probabilidade:

$$\boxed{P(KK) = \frac{1}{4}}$$

24. Qual é o dominio de $f(x) = \log_2(x+4)$?

A $]-\infty;4]$

C $]4;+\infty[$

B $]-4;+\infty[$

D $[-4;+\infty[$

Resposta: B $]-4;+\infty[$
Explicação: A função logarítmica $f(x) = \log_2(x+4)$ está definida quando:

$$x+4>0 \implies x>-4.$$

25. Qual é o zero $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)+1$?

A $x=-2$

C $x=1$

B $x=-1$

D $x=2$

Resposta: C $x=1$
Explicação: O zero da função ocorre quando $f(x)=0$:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+1=0 \implies \log_{\frac{1}{2}}(x+1)=-1.$$

Sabemos que $\log_{\frac{1}{2}}(a)=b \implies a=\left(\frac{1}{2}\right)^b$:

$$x+1=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \implies x+1=2 \implies x=1.$$

26. Qual dos seguintes diagramas **Resposta:** D
Explicação: Uma função $f : A \to B$ é considerada **injetiva** (ou injetora) se **elementos distintos no domínio A possuem imagens distintas no contradomínio B**. Em termos matemáticos, para f ser injetiva:

$$\forall x_1, x_2 \in A, \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

27. Qual é o termo geral da sucessão: 1,4,9,16,25,...

A $n+3$

C n^2

B n^3

D n^2+1

Resposta: C n^2
Explicação: Observando os termos:

$$1=1^2, 4=2^2, 9=3^2, 16=4^2, 25=5^2, \ldots$$

O termo geral da sucessão é:

$$\boxed{a_n = n^2}$$

28. Qual é o valor lim $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^3-2n-1}{n^2-5}$?

A $-\infty$

B 1

C 3

D $+\infty$

Resposta: D ∞

Explicação:

29. Qual é o termo geral de uma sucessão infinitamente pequena?

A $\frac{n-1}{n}$

B $\frac{n}{n+1}$

C $\frac{n+1}{n}$

D $\frac{1}{n}$

Resposta: D $\frac{1}{n}$

Explicação: Uma sucessão a_n é chamada infinitamente pequena se o limite lim $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. E o $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ é zero.

30. Considere uma progressão aritmética com, $a_2 = 10$ e $a_5 = -8$. Qual é a razão entre os termos dessa progressão?

A -6

B -3

C 3

D 6

Resposta: D -6
Explicação Sabemos:

$$a_2 = 10, \quad a_5 = -8, \quad \text{e a fórmula da PA: } a_n = a_1 + (n-1)d$$

i. : Substituir os valores na fórmula da PA

1. Para $a_2 = 10$:

$$10 = a_1 + (2-1)r \implies 10 = a_1 + d \tag{1}$$

2. Para $a_5 = -8$:

$$-8 = a_1 + (5-1)d \implies -8 = a_1 + 4d \tag{2}$$

ii. Resolver o sistema de equações

Subtraímos a equação (1) da equação (2):

$$(a_1 + 4d) - (a_1 + d) = -8 - 10 \implies 3d = -18 \implies d = -6.$$

31. Qual é o valor de $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}, \ldots$

A $\frac{1}{4}$

B $\frac{1}{2}$

C $\frac{4}{3}$

D $\frac{3}{2}$

Resposta: D $\frac{3}{2}$
Explicação: Observa-se que a soma é uma progressão geométrica infinita, com primeiro termo $a = 1$ e razão $r = \frac{1}{3}$.

A soma de uma progressão geométrica infinita é dada por:

$$S = \frac{a}{1-r}, \quad \text{para } |r| < 1.$$

Substituímos $a = 1$ e $r = \frac{1}{3}$:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$S = \frac{1}{\frac{2}{3}}$$

$$\boxed{S = \frac{3}{2}}$$

Resposta: D $\frac{3}{2}$

32. Qual das seguintes afirmações é verdadeira

A Se $a \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então $\lim_{x \to a} [a \cdot f(x)] = a \cdot \lim_{x \to a} f(x) = a + L$

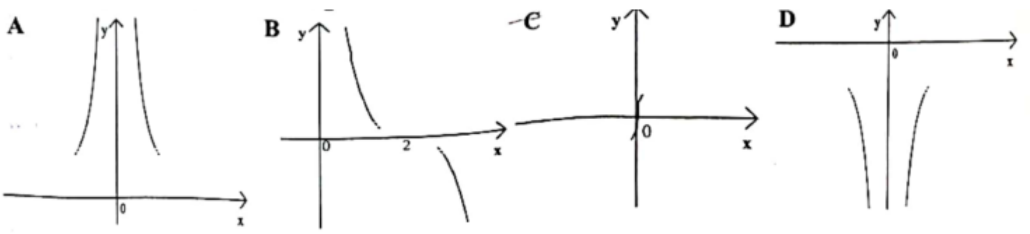
B Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M \neq 0$, então $\lim_{x \to a} (f/g)(x) = L/M$

C Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$ então $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = L \times M$

D Se $c \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então $\lim_{x \to a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to a} f(x) = c - L$

Resposta: B
Explicação: Propriedade de Limites

33. De uma função h sabe se que: o contradominio de h é $\mathbb{R}$, $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$. Qual dos seguintes poderá ser o gráfico?



Resposta: D
Explicação: Dada a função $h(x)$, temos as seguintes informações:

- O contradomínio de h é $\mathbb{R}$, ou seja, a função atinge todos os valores reais.
- $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$, o que significa que a função cresce indefinidamente para $+\infty$ quando $x \to +\infty$.
- $\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$, o que implica que a função decresce indefinidamente para $-\infty$ quando $x \to -\infty$.

Análise gráfica:

- O gráfico correto deve mostrar um comportamento **crescente** de $h(x)$ de $-\infty$ a $+\infty$, passando por todos os valores reais.
- Apenas o gráfico **D** apresenta essas características: ele é contínuo e cresce de forma consistente de $-\infty$ a $+\infty$.

34. Qual é o valor de $\lim_{x \to 7} \frac{x^2 - 49}{x - 7}$?

A -14

B -7

C 7

D 14

Resposta: D 14
Explicação: Substituindo diretamente

$$\lim_{x \to 7} \frac{x^2 - 49}{x - 7}$$

$$= \lim_{x\to 7} \frac{(x-7)(x+7)}{(x-7)}$$

$$= \lim_{x\to 7} \frac{\cancel{(x-7)}(x+7)}{\cancel{(x-7)}}$$

$$= \lim_{x\to 7}(x+7) = 7+7 = 14$$

35. Qual é o valor de $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-3x+8}{x-1}$?

A $+\infty$

B 5

C 2

D $-\infty$

Resposta: A $+\infty$
Explicação:
Análise do limite
Dividimos numerador e denominador por x^2 (a maior potência de x presente no numerador):

$$\frac{2x^2-3x+8}{x-1} = \frac{2-\frac{3}{x}+\frac{8}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}$$

Quando $x \to +\infty$, os termos com $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x^2}$ tendem a 0:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-3x+8}{x-1} = +\infty$$

36. Qual é o valor de $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{5+x^2}-x)$?

A -2

B -1

C 0

D 1

Resposta: C 0

Queremos calcular o limite: $L = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{5+x^2}-x)$.

ii. Multiplicação pelo conjugado
Multiplicamos numerador e denominador pelo conjugado $\sqrt{5+x^2}+x$:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{5+x^2}-x)(\sqrt{5+x^2}+x)}{\sqrt{5+x^2}+x}.$$

No numerador, aplicamos a identidade da diferença de quadrados:

$$(\sqrt{5+x^2}-x)(\sqrt{5+x^2}+x) = (5+x^2)-x^2 = 5.$$

Assim, obtemos:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{\sqrt{5+x^2}+x}.$$

ii. Dividindo pelo maior termo do denominador

Sabemos que $\sqrt{5+x^2} = x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}$. Substituímos isso no denominador:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+x}.$$

ii: Fatorando x no denominador

Colocamos x em evidência no denominador:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+1\right)}.$$

Quando $x \to +\infty$, temos $\frac{5}{x^2} \to 0$, o que implica $\sqrt{1+\frac{5}{x^2}} \to 1$. Substituímos no limite:

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x(1+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{2x}.$$

Como $\frac{5}{2x} \to 0$ quando $x \to +\infty$, concluímos que:

$$L = 0.$$

37. Qual é o valor de $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{2x}$?

A e^{-4}

B e^{-2}

C e^{2}

D e^{4}

Resposta: B e^{-2}

Explicação: O limite $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{2x}$ pode ser reescrito como $\lim_{x\to+\infty} \left(\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{2}$ ainda $\left(\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{2}$
Sabendo que:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{x} = e^{a}$$

Neste caso, $a = -1$. Logo:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{x} = e^{-1}$$

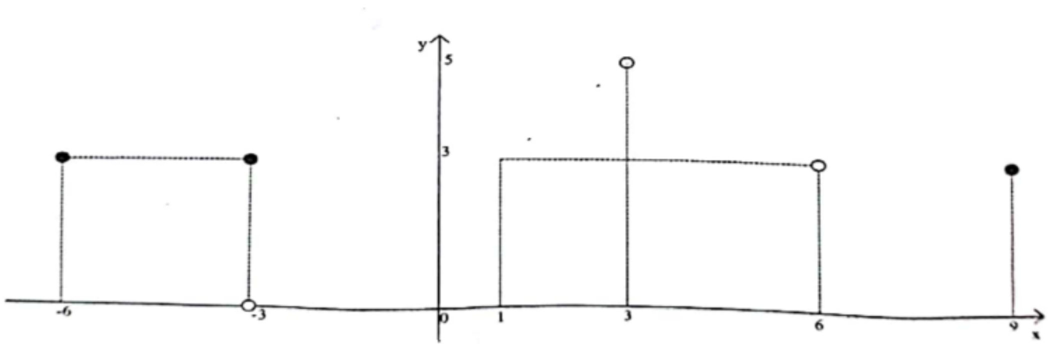
e ainda:

$$\left(\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{2}$$

$$= (e^{-1})^{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{2x} = e^{-2}}$$

38. Considere a função f representada pelo gráfico abaixo. Qual das opções é correcta?



A $\lim_{x\to 6^+} = 2$

B $\lim_{x\to 1} = 3$

C $\lim_{x\to -3} f(x) = f(3)$

D $\lim_{x\to -1^-} f(x)$

Resposta: A e D **Explicação:** Analisando o gráfico fornecido, observamos o comportamento da função $f(x)$ em relação às opções dadas:

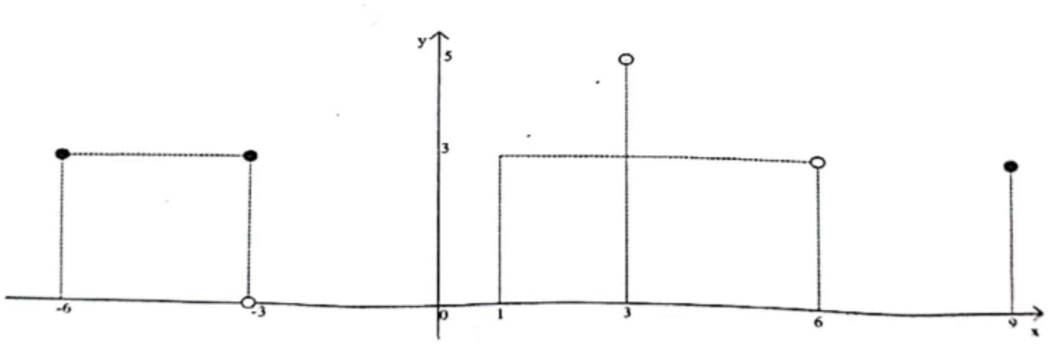
i. **Opção A:** $\lim_{x \to -6} f(x) = 2$**:** No gráfico, conforme $x \to -6$, os valores de $f(x)$ aproximam-se de 2, pois há continuidade nesse ponto. Essa afirmação está correta.

ii. **Opção B:** $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$**:** Ao analisar o gráfico, vemos que no ponto $x = 1$, o valor da função é $f(x) = 3$, mas o limite da função quando $x \to 1$ não existe porque os limites laterais são diferentes ($f(x) \to 3$ pela direita, mas pela esquerda $f(x) \to 0$). Logo, essa afirmação está incorreta.

iii. **Opção C:** $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$**:** No gráfico, $f(3)$ é representado pelo ponto vazio ($f(3)$ não está definido), mas o limite lateral pela esquerda e pela direita é 5. Portanto, $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$, mas $f(3)$ não existe, então essa afirmação está incorreta.

iv. **Opção D:** $\lim_{x \to -1} f(x) = 0$**:** No gráfico, $f(x) \to 0$ conforme $x \to -1$ (o ponto de descontinuidade não afeta o limite). Logo, essa afirmação está correta.

39. A função é descontínua, respectivamente, nos pontos de abcissas...



A $x = \{-3, 3, 6\}$

B $x = \{-6, -1, 3\}$

C $x = \{0, 1, 3\}$

D $x = \{-3, 0, 6\}$

Resposta: A $x = \{-3, 3, 6\}$
Com base no gráfico fornecido, podemos determinar os **pontos de descontinuidade** da função $f(x)$. Para isso, identificamos os pontos onde há interrupções ou mudanças bruscas no comportamento da função, como saltos, pontos de valor indefinido, ou diferenças entre limites laterais.

Pontos de descontinuidade

(a) $\boldsymbol{x = -3}$: O gráfico apresenta um **salto**. O limite lateral à esquerda ($x \to -3^-$) é diferente do limite lateral à direita ($x \to -3^+$). Além disso, o ponto em $x = -3$ é representado por um círculo vazio, indicando que $f(-3)$ não está definido.

(b) $\boldsymbol{x = 3}$: O gráfico apresenta um **salto** em $x = 3$. Os limites laterais ($x \to 3^-$ e $x \to 3^+$) existem e são iguais a 5, mas o valor da função $f(3)$ não está definido (ponto vazio no gráfico). Isso caracteriza uma descontinuidade do tipo salto.

(c) $\boldsymbol{x = 6}$: O gráfico apresenta um **salto**. O limite lateral à esquerda ($x \to 6^-$) é igual a 3, enquanto o limite lateral à direita ($x \to 6^+$) é igual a 0. Como esses limites são diferentes, há uma descontinuidade do tipo salto em $x = 6$.

Os pontos de descontinuidade são:

$$x = -3, x = 3, x = 6,$$

40. Para que valor(es) de k $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}, & \text{se } x \neq 4, \\ k, & \text{se } x = 4. \end{cases}$ é contínua no ponto de abcissa no ponto $x = 4$?

A 0

B 4

C 8

D 12

Resposta: C 8
Explicação: Para que a função $f(x)$ seja contínua no ponto $x = 4$, é necessário que:

(a) $\lim_{x \to 4} f(x)$ exista

(b) $\lim_{x \to 4} f(x) = f(4)$

A função é dada como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4}, & \text{se } x \neq 4, \\ k, & \text{se } x = 4. \end{cases}$$

i. Simplificar a função para $x \neq 4$

No numerador, $x^2 - 16$ pode ser fatorado:

$$x^2 - 16 = (x-4)(x+4).$$

Assim, para $x \neq 4$:

$$f(x) = \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = x + 4.$$

Logo, para $x \neq 4$, a função $f(x) = x + 4$.

ii. Calcular o limite quando $x \to 4$

Para garantir a continuidade em $x = 4$, o limite lateral deve existir e ser igual ao valor da função no ponto:

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} (x+4) = 4 + 4 = 8$$

$$\boxed{f(4) = k = 8}$$